Universidade de Lisboa

O raciocínio geométrico de alunos do 9.º ano no estudo da circunferência

Maria Mariana Alexandre Guerreiro

Relatório da prática de ensino supervisionada orientado pela
Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira
e coorientado pela
Professora Doutora Helena Maria da Encarnação Sezinando

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

2017

Resumo

Esta investigação decorre da lecionação da subunidade “Ângulos e circunferência” integrada no currículo de Matemática do 9.º ano e procura analisar o raciocínio geométrico dos alunos no estudo da circunferência, em particular, pretende-se compreender a estruturação espacial e domínio de conceitos que os alunos realizam no estudo desta subunidade e quais as principais dificuldades manifestadas pelos mesmos neste contexto. A análise do raciocínio geométrico dos alunos a nível da estruturação espacial e do domínio de conceitos será feita com base no trabalho desenvolvido por van Hiele, seguindo este estudo uma metodologia de carácter qualitativo e interpretativo com recurso às videogravações das aulas, às observações por mim registadas em diário de bordo e aos documentos produzidos pelos alunos da turma durante as atividades realizadas durante a subunidade.

Os resultados obtidos mostram que os alunos, na sua generalidade, recorrem frequentemente e de forma natural ao reconhecimento visual de objetos geométricos, sendo muitas vezes “enganados” pela posição ou pelo aspeto geral desses mesmos objetivos. O processo de formulação de generalizações é bastante intuitivo, sendo realizado com alguma facilidade por parte dos alunos, baseando-se ainda em verificações empíricas de exemplos concretos. Os alunos mostram evolução no reconhecimento de propriedades matemáticas que vão para além dos atributos físicos dos objetos. O reconhecimento dos objetos em estudo evolui de um processo meramente visual para o recurso a definições. Já no processo de classificação, os estudantes demonstram bastantes dificuldades em hierarquizar alguns conceitos, mesmo que estes pareçam bem assimilados. Uma vez presentes os conceitos e as propriedades a utilizar, os alunos manifestam alguma dificuldade em relacionar e articular os mesmos, apresentando algumas incoerências e erros científicos.

Palavras-chave: geometria; raciocínio geométrico; ângulo; circunferência; 9.º ano.

Abstract

This investigation is based on the teaching of the subunit: “Angles and circumference” included on the subject of Mathematics from the 9th grade. It seeks to analyze the geometrical reasoning of the students in the study of the circumference, mainly, it is intended to understand the spatial structuring and the domain of the concepts students made in the study of the subunit and which are their main difficulties on this matter. The analyzes of the geometrical reasoning of the students in terms of spatial structuring and the domain of the concepts will be based on the results of the work developed by van Hiele. In this way, my investigation follows a qualitative and interpretative methodology, applied by using video recording of the classes, important notes registered on my research log and documents completed by the students during the activities undertaken during this subunit.

The results obtained show that students, generally, often and naturally use the visual perception to make the recognition of the geometrical objects, therefore, several times they end up being wrongly deceived by the position or the general look of those objects. The process of generalization is quite intuitive and it can be easily by part of the students, even though based on empirical statements of concrete examples. Students show evolution in the recognition of mathematical properties that go beyond the physical attributes of objects. The recognition of the objects under study evolves from a merely visual process to the use of definitions. In what regards the process of classification, students demonstrate several difficulties in ranking some concepts, even if these look to be well assimilated. Although these concepts and mathematical properties seem to be well identified, students reveal some difficulty in relating and articulate them, presenting some incoherence and scientific errors.

Keywords: geometry; geometrical reasoning; angle; circumference; 9th grade.

“Pelo sonho é que vamos,
comovidos e mudos.

Chegamos? Não chegamos?
Haja ou não haja frutos,
pelo sonho é que vamos.
Basta a fé no que temos.
Basta a esperança naquilo
que talvez não teremos.
Basta que a alma demos,
com a mesma alegria,
ao que desconhecemos
e ao que é do dia a dia.
Chegamos? Não chegamos?
– Partimos. Vamos. Somos.”

(Sebastião da Gama)

À minha sobrinha Maria Francisca.

À minha afilhada Matilde.

Agradecimentos

Sozinha não conseguia…

Agradeço verdadeiramente e em primeiro lugar, à minha orientadora Professora Hélia Oliveira que me ensinou, pelo exemplo, o que é ser um(a) ótimo(a) professor(a) e por isso será sempre uma inspiração. Porque na sua agenda conseguiu sempre uns (muitos) minutos para conversar, para ler, para corrigir, para ajudar... Obrigada!

À minha co-orientadora, Professora Helena Sezinando, que me ajudou a perceber a importância do rigor científico com que ensinamos e a não descorar do mesmo na elaboração deste estudo.

À Professora Anabela Candeias… Como poderei agradecer-lhe por toda a dedicação, aconselhamento, companheirismo e compreensão? Uma professora cooperante que se tornou uma grande amiga, que tanto tempo despendeu para me tentar motivar no uso da Dropbox, da Drive e de outras tantas coisas que fogem dos meus "papéis". Fica a esperança de um dia voltarmos a trabalhar juntas.

Ao Agrupamento de Escolas de Caneças, por me ter dado a oportunidade de estagiar na Escola Secundária, dando-me todas as condições para realizar um bom trabalho. Neste sentido, um grande obrigada ao corpo docente de toda a escola, em especial aos professores da turma que acompanhei, por me fazerem sentir em casa. De forma particular, ao diretor da minha turma, o professor Paulo Falardo. Por todos os esclarecimentos, por todas as conversas que me contextualizavam na situação escolar dos alunos, por alimentar esta minha vontade de dar sempre mais aos alunos e por me mostrar (sem saber) como gerir um grupo de professores tão heterogéneo em conselho de turma.

E chega a vez de quem eu não consigo colocar por palavras o quanto tenho a agradecer: a família (e quem estás prestes a fazer parte dela).

Avô, assististe apenas a uma parte deste esforço. O quanto gostava que aqui estivesses a ver. Vês de uma outra perspetiva. Espero que estejas feliz!

Pais, esta conquista também é vossa. Valeu a pena as noites mal dormidas por culpa de uma criança febril, as tontarias de uma adolescente, as correrias de uma jovem… ela está a tornar-se uma adulta feliz.

Manas e cunhado. Cada um com o seu papel neste meu percurso. Não especificarei. Mas há um agradecimento especial àqueles me deram a melhor prenda que recebi até hoje e que foi tantas vezes uma motivação: a Francisca. (Obrigada Hugo, aqui está o agradecimento ao informático de serviço.)

Gabriel… A ti que foste suporte em tantos momentos de fraqueza e desmotivação. A ti que foste namorado, que és agora noivo, e desde/para sempre, amigo. Porque não disseste o que queria, disseste o que era necessário. Obrigada por respeitares o meu trabalho e por me ajudares a perceber o quanto gosto dele quando as dúvidas me assolam. “Partimos. Vamos. Somos.”

A Ti!

Índice

RESUMO .... **III**

ABSTRACT .... **IV**

AGRADECIMENTOS .... **VIII**

ÍNDICE .... **XI**

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO **1**

1.1. Objetivos e questões do estudo 1

1.2. Motivações pessoais 2

1.3. Organização do relatório 3

CAPÍTULO 2: ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO **6**

2.1. Geometria e raciocínio geométrico 6

2.1.1. Era uma vez… a Geometria e o currículo *6*

2.1.2. O raciocínio geométrico *10*

2.2. Os níveis de van Hiele 12

2.2.1. A existência de níveis *13*

2.2.2. Propriedades dos níveis *14*

2.2.3. A evolução em cada nível *21*

CAPÍTULO 3: UNIDADE DE ENSINO **23**

3.1. Caracterização do contexto 23

3.1.1. A escola *23*

3.1.2. A turma *24*

3.2. Ancoragem da unidade de ensino no programa 26

3.3. Conceitos matemáticos 30

3.3.1. Arcos e cordas de uma circunferência *31*

3.3.2. Relação entre cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes *33*

3.3.3. Comprimento de um arco de circunferência e área de um setor circular *34*

3.3.4. Ângulos excêntricos *35*

3.3.5. Ângulos internos e externos de um polígono convexo *40*

3.3.6. Polígonos inscritos numa circunferência *42*

3.4. Metodologia e estratégias de ensino 45

3.5. Os recursos e as tarefas 48

3.5.1. Os recursos *48*

3.5.2. As tarefas ... *50*

3.6. A avaliação das aprendizagens ... 57

3.7. Descrição da intervenção letiva ... 59

3.7.1. 1.ª aula: 2 de março de 2017 ... *59*

3.7.2. 2.ª aula: 6 de março de 2017 ... *61*

3.7.3. 3.ª aula: 7 de março de 2017 ... *64*

3.7.4. 4.ª aula: 9 de março de 2017 ... *65*

3.7.5. 5.ª aula: 13 de março de 2017 ... *67*

3.7.6. 6.ª aula: 14 de março de 2017 ... *70*

3.7.7. 7.ª aula: 16 de março de 2017 ... *70*

3.7.8. 8.ª aula: 20 de março de 2017 ... *70*

3.7.9. 9.ª aula: 21 de março de 2017 ... *73*

3.7.10. 10.ª aula: 23 de março de 2017 ... *74*

3.7.11. 11.ª aula: 27 de março de 2017 ... *76*

3.7.12. 12.ª aula: 28 de março de 2017 ... *78*

3.7.13. 13.ª aula: 30 de março de 2017 ... *79*

3.7.14. 14.ª aula: 3 de abril de 2017 ... *82*

3.7.15. 15.ª aula: 4 de abril de 2017 ... *83*

CAPÍTULO 4: METODOLOGIA DO ESTUDO ... 85

4.1. Opções metodológicas ... 85

4.2. Métodos de recolha de dados ... 89

4.3. Participantes ... 90

4.4. Análise de dados ... 91

CAPÍTULO 5: OS CASOS ... 97

5.1. O caso de Teresa ... 97

5.1.1. A ficha diagnóstico ... *97*

5.1.2. Questão 2 da página 82 do manual ... *101*

5.1.3. Questão 3.2 da página 82 do manual ... *103*

5.1.4. Tarefa "Investigando a circunferência" ... *104*

5.1.5. Questões 2.2 e 2.3 da página 90 do manual ... *106*

5.1.6. Classificar o ângulo inscrito como um ângulo excêntrico ... *107*

5.1.7. Questão 2 da tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos" ... *108*

5.1.8. Tarefa "Ângulos internos de um polígono" ... *110*

5.2. O caso de Matilde ... 111

5.2.1. Tarefa "Arcos e cordas" ... *112*

5.2.2. Tarefa de revisão da primeira aula ... *113*

5.2.3. Questão 2 da página 82 do manual ... *114*

5.2.4. Questão 3 da página 82 do manual *116*
5.2.5. Questão 2 da página 90 do manual *119*

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO **121**

6.1. Síntese do estudo 121
6.2. Principais conclusões 122
6.3. Reflexão final 125

REFERÊNCIAS **127**

ANEXOS **131**

Anexo A 131
Anexo B: As tarefas 135
Anexo C: Autorizações/Comunicados 152
Anexo D: Planos de aula 157

Índice de quadros

Quadro 1: Exemplos/referências ao primeiro nível de van Hiele. 16
Quadro 2: Exemplos/referências ao segundo nível de van Hiele. 17
Quadro 3: Exemplos/referências ao terceiro nível de van Hiele. 19
Quadro 4: Exemplos/referências ao quarto nível de van Hiele. 20
Quadro 5: Aprendizagens a realizar pelos alunos no âmbito da Geometria no 9.º ano (PMEB). 26
Quadro 6: Planificação da subunidade de ensino "Ângulos e circunferência". 28
Quadro 7: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 2, 3 e 4. 52
Quadro 8: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 5 e 8. 54
Quadro 9: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 6 e 7. 56
Quadro 10: Características dos níveis de van Hiele na subunidade ângulos e circunferências. 91
Quadro 11: Características dos processos matemáticos, segundo Díaz, Gutiérrez e Jaime (1998, p. 32). 94

Índice de figuras

FIGURA 2 31
FIGURA 3 32
FIGURA 4 32
FIGURA 5 33
FIGURA 6 33
FIGURA 7 34
FIGURA 8 35
FIGURA 9 35
FIGURA 10 36
FIGURA 11 37
FIGURA 12 37
FIGURA 13 38
FIGURA 14 38
FIGURA 15 39
FIGURA 16 39
FIGURA 17 40
FIGURA 18 40
FIGURA 19 41
FIGURA 20 42
FIGURA 21 43
FIGURA 22 44
FIGURA 23: RESOLUÇÃO DE TERESA DA PRIMEIRA QUESTÃO DA FICHA DIAGNÓSTICO. 97
FIGURA 24: RESOLUÇÃO DE TERESA DA QUINTA QUESTÃO DA FICHA DIAGNÓSTICA. 98
FIGURA 25: RESOLUÇÃO DE TERESA DA SEXTA QUESTÃO DA FICHA DIAGNÓSTICO. 99
FIGURA 26: RESOLUÇÃO DE TERESA DA QUESTÃO SETE DA FICHA DIAGNÓSTICO 100
FIGURA 27: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 2 DA PÁGINA 82 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE TERESA. 101
FIGURA 28: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 3 DA PÁGINA 82 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE TERESA. 103
FIGURA 29: RESPOSTA DE TERESA ÀS QUESTÕES 1 E 2 DA TAREFA "INVESTIGANDO A CIRCUNFERÊNCIA" 104
FIGURA 30: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 2 DA PÁGINA 90 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE TERESA. 106
FIGURA 31: ENUNCIADO E RESPETIVA RESPOSTA DE TERESA AO EXERCÍCIO 2 DA TAREFA "ÂNGULOS DE SEGMENTO E EX-INSCRITOS". 108

FIGURA 32: AS DUAS DIAGONAIS TRAÇADAS PELA ALUNA NO LOSANGO. 110

FIGURA 33: O PREENCHIMENTO DA TABELA DE TERESA NA TAREFA "ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS DE UM POLÍGONO". 110

FIGURA 34: ENUNCIADO DA TAREFA "ARCOS E CORDAS" E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE MATILDE. 112

FIGURA 35: TAREFA DE REVISÃO DA PRIMEIRA AULA. 114

FIGURA 36: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 2 DA PÁGINA 82 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE MATILDE. 114

FIGURA 37: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 3 DA PÁGINA 82 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE TERESA. 116

FIGURA 38: ENUNCIADO DO EXERCÍCIO 2 DA PÁGINA 90 DO SEGUNDO VOLUME DO MANUAL ADOTADO E A RESPETIVA RESOLUÇÃO DE MATILDE. 119

Índice de anexos

Anexo A

Anexo 1: Exemplos de atividades para a aprendizagem da semelhança de figuras planas e espaciais (Díaz, Gutiérrez e Jaime, 2016, p. 112) 131

Anexo 2: Distribuição das cotações no exame nacional de 9.º ano (disponível em http://provas.iave.pt/np4/file/163/IE_PF_Mat92_2017.pdf). 132

Anexo 3: Oferta formativa do Agrupamento de Escolas de Caneças no ano letivo 2016/2017 (disponível em http://aecanecas.com/ano-letivo-2016-2017/oferta-formativa-2016-2017.html). 132

Anexo 4: Planificação anual do 9.º ano na disciplina de Matemática no Agrupamento de Escolas de Caneças, em vigor no ano letivo 2016/2017. 133

Anexo B

Anexo 5: "Ficha diagnóstico" 135

Anexo 6: Tarefa "Arcos e cordas" 137

Anexo 7: Guião da tarefa "Arcos e cordas" 139

Anexo 8: Tarefa "Investigando a circunferência" (adaptada do manual). 143

Anexo 9: Tarefa "ângulos excêntricos" (adaptada do manual). 144

Anexo 10: Tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos" 145

Anexo 11: Tarefa "Ângulos internos de um polígono". 147

Anexo 12: Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular". 149

Anexo 13: Tarefa "Construir polígonos regulares". 150

Anexo 14: Questionário 151

Anexo C

Anexo 15: Pedido de autorização ao diretor da escola. 152

Anexo 16: Pedido de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma. 153

Anexo 17: Comunicado ao Diretor de Turma. 155

Anexo 18: Comunicado ao Coordenador do Departamento de Matemática. 156

Anexo D

Anexo 19: Plano da aula do dia 2 de março. 157

Anexo 20: Plano da aula do dia 6 de março. 165

Anexo 21: Plano da aula do dia 7 de março. 175

Anexo 22: Plano da aula do dia 9 de março. 179

Anexo 23: Plano da aula do dia 13 de março. 186

ANEXO 24: PLANO DA AULA DO DIA 20 DE MARÇO. 192
ANEXO 25: PLANO DA AULA DO DIA 21 DE MARÇO. 197
ANEXO 26: PLANO DA AULA DO DIA 23 DE MARÇO. 204
ANEXO 27: PLANO DA AULA DO DIA 27 DE MARÇO. 210
ANEXO 28: PLANO DA AULA DO DIA 28 DE MARÇO. 216
ANEXO 29: PLANO DA AULA DO DIA 30 DE MARÇO. 219
ANEXO 30: PLANO DA AULA DO DIA 3 DE ABRIL. 224
ANEXO 31: PLANO DA AULA DO DIA 4 DE ABRIL. 227

Capítulo 1: Introdução

Este trabalho que me propus realizar integra-se no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, como relatório da prática supervisionada e decorre da lecionação da subunidade "Ângulos e circunferência" numa turma do 9.º ano da Escola Secundária de Caneças. A intervenção letiva alvo deste estudo deu-se entre 2 de março e 4 de abril, inclusive, incidindo no final do 2.º período letivo (do ano 2016/2017), na parte final da unidade didática de Geometria. O ensino desta subunidade integrou a lecionação de 15 aulas, cinco delas com a duração de 45 minutos cada e as restantes 10 com a duração de 90 minutos cada.

1.1. Objetivos e questões do estudo

A propósito do que nos move a investigar, Coutinho (2011) refere que ao falar-se de investigação, seja qual for, surgem instantaneamente as primeiras questões que dizem respeito ao problema que se procura investigar e o que se deve fazer para conhecê-lo em profundidade. Estas primeiras questões, por sua vez, levam as outras tantas, isto porque quando se investiga ou procura algo, procura-se sempre nalgum lugar, com uma intenção específica e de algum modo, com determinados objetivos e para algum fim.

Sendo este estudo de carácter investigativo também ele se enquadra num problema e tem um objetivo que se concretiza em questões específicas. Assim, decorrente da lecionação da subunidade "Ângulos e circunferência", do 9.º ano do 3.º ciclo do ensino básico, este estudo tem como objetivo principal analisar o raciocínio geométrico dos alunos no estudo da circunferência, guiando-se por duas questões principais de investigação:

a) Como se caracteriza o raciocínio geométrico dos alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?
b) Que dificuldades manifestam os alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?

1.2. Motivações pessoais

Todos os anos a comunicação social dá um destaque negativo aos resultados obtidos nos exames nacionais da disciplina de Matemática. Ainda em julho do ano passado, um artigo do jornal Público (disponível em https://www.publico.pt/2016/07/12/sociedade/noticia/medias-nos-exames-do-9-ano-baixaram-1738025) referia que a média nacional no exame fora de 47% e que dos estudantes que fizeram o exame de Matemática (91 mil, aproximadamente), 34% ficaram retidos nesta disciplina. Segundo informações disponibilizadas pelo IAVE (2016), a nível de exame nacional é precisamente o conteúdo «Geometria» que maior cotação tem, entre 35% e 45% (Anexo 2), e onde se regista maior índice de insucesso. Por isso, tanto os professores como investigadores desenvolvem esforços para a superação das dificuldades dos alunos.

Ao analisar os Programas e as Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013) constatei que a Geometria é um tema que assume uma grande presença e espaço no currículo do 9.º ano tendo continuamente como objetivos o desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e da intuição geométrica. Reconheço também, pelo que foi possível aprender e viver nas mais variadas disciplinas deste mestrado, em especial as de Didática, que está a percorrer-se um caminho ao encontro de métodos que impulsionem os alunos a explorar, investigar, conjeturar, resolver problemas, comunicar matematicamente, construir e compreender conceitos e pequenas demonstrações.

Porém, importa ressalvar que o que é apresentado e proposto pelo programa pode não corresponder ao que é implementado por determinado professor de uma dada escola. O objetivo de analisar o raciocínio geométrico dos alunos advém precisamente do facto de, comparativamente à importância que tem no quotidiano de cada aluno e em todo o seu desenvolvimento escolar, a Geometria não estar a ser explorada devidamente em todas as suas vertentes nas escolas:

> a geometria e a medida são duas áreas da Matemática fundamentais para o dia-a-dia dos cidadãos a que a escola, no entanto, não tem

> dado a devida atenção. A geometria é normalmente deixada para os finais dos anos letivos e tratada a partir das definições, dando pouco espaço à ação dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos. A medida traduz-se, tradicionalmente, à aplicação de fórmulas e realização de cálculos. (Breda et al., 2011, p. 7)

Muitas das teorias que procuram aprofundar o conhecimento na área do ensino e aprendizagem da Geometria, recorrem às descobertas feitas por Dina e Pierre van Hiele (Swoboda & Vighi, 2016). Também a minha análise do raciocínio geométrico dos alunos é baseada no trabalho desenvolvido por este casal de professores holandeses bem como de outros investigadores da área (Díaz, Gutiérrez & Jaime, 2016). Destas teorias e/ou trabalhos procuro recolher valências que me auxiliem a tratar o objetivo e as questões deste projeto: analisar o raciocínio geométrico dos alunos a nível da estruturação espacial (Battista, 2007; 2008a) e do domínio de conceitos (Battista, 2007; 2008a; Brunheira & Ponte, 2016).

1.3. Organização do relatório

Este trabalho inclui seis capítulos distintos, mas fortemente interrelacionados, e são eles: introdução, enquadramento curricular e didático, unidade de ensino, metodologia do estudo, os casos e conclusão.

O primeiro capítulo – a introdução – serve o propósito de apresentar os objetivos e as questões que guiaram a investigação, bem como a duração da intervenção letiva alvo deste estudo e a turma em que foi desenvolvida. São ainda divulgadas as minhas motivações pessoais para o estudo de uma problemática inserida nesta subunidade curricular e as razões pelas quais optei por uma determinada metodologia ao invés de outra ao longo da lecionação da mesma subunidade.

No segundo capítulo – o enquadramento curricular e didático – apresento alguma da informação em literatura de referência que me pareceu essencial ou relevante tanto para o planeamento da intervenção letiva, como também para a sua concretização em sala de aula e para a posterior reflexão e análise dos dados recolhidos através da mesma. Toda a contextualização teórica vai ao encontro das questões e objetivos apresentados no capítulo anterior.

O terceiro capítulo – a unidade de ensino – contempla várias componentes: *a caracterização do contexto escolar e da turma*, onde descrevo o contexto social e educacional em que a escola se insere bem como uma breve caracterização da turma em termos de empenho, comportamento e postura em qualquer sala de aula, no geral, e na de Matemática, em particular*; a ancoragem da unidade de ensino no programa* e nela aponto para o trabalho que tinha sido desenvolvido dentro da unidade de Geometria neste mesmo ano letivo, anteriormente à intervenção em estudo; *os conceitos matemáticos*, na qual esclareço os tópicos abordados em aula fazendo alguma referência a alternativas ou outras possibilidades de trabalhar alguns deles em sala de aula; a *metodologia e estratégias de ensino* explicita as minhas opções didáticas devidamente justificadas tendo em consideração a turma na qual a intervenção letiva se realizou; *os recursos e as tarefas* usados durante a lecionação da subunidade; *a avaliação das aprendizagens* onde identifico os processos e/ou instrumentos dos quais fiz uso para acompanhar e avaliar o trabalho e a evolução dos alunos e, por fim, *a descrição da intervenção letiva*, revestida de um carácter mais reflexivo do que descritivo, apresenta os desvios que foram feitos aos planos de aula, bem como os motivos que o justificam e em que medida os objetivos estabelecidos para cada uma dessas aulas foram alcançados.

No capítulo "Metodologia do estudo" explicito todos os métodos e instrumentos de que me servi para recolher dados, que após uma análise criteriosa e reflexiva, se mostrassem relevantes e conclusivos para o estudo indo ao encontro das questões expostas, pela primeira vez, no primeiro capítulo. Este capítulo também apresenta os critérios que tive em conta para a escolha dos participantes do meu estudo e engloba ainda o quadro teórico que fundamenta a minha análise de dados realizada no capítulo posterior.

No quinto capítulo, após uma breve caracterização dos alunos que constituem os casos do meu estudo, revelo as reflexões e análises feitas dos dados retirados ao longo da lecionação da subunidade em causa: "Ângulos e circunferência". Para a realização da referida análise faço referência a alguns dos quadros apresentados tanto no primeiro como no quarto capítulos que sintetizam alguns dos critérios utilizados por diversos autores/investigadores da área.

Por último, o sexto capítulo, reúne e sintetiza os resultados da análise realizada no relatório, apresentando conclusões e reflexões que se mostrem relevantes enquanto possíveis respostas às questões inicialmente propostas. Este balanço inclui também as dificuldades ou limitações por mim sentidas durante a realização deste estudo tanto a nível investigativo como a nível da prática de ensino e o modo como as ultrapassei ou não. Esta reflexão constitui um reconhecimento das possíveis implicações que a concretização deste estudo pode vir a ter na minha futura prática profissional.

Capítulo 2: Enquadramento curricular e didático

2.1. Geometria e raciocínio geométrico

2.1.1. Era uma vez… a Geometria e o currículo

Segundo a brochura para o ensino da Matemática de 10.º ano (Loureiro et al., 1997, p. 34), o termo "Geometria" deriva do grego *geometrein*, onde *geo* se traduz por "terra" e *metrein* indica o verbo "medir", e assim Geometria significa "medição da terra".

A mais provável origem da Geometria remete-nos para o Antigo Egipto (sec. IV a.C.) e, por isso, é considerado o ramo mais antigo da Matemática. De facto, na época, a Geometria resumia-se à agrimensura ou medição de terrenos ou propriedades, mas é certo que muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, da Babilónia à China, passando pela civilização Hindu (Jones, 2002). Por volta de 300 a.C., *Os Elementos de Euclides,* pela sua forte demonstração formal de teoremas, através de princípios e postulados, tornou-se assim o símbolo que dominou o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado método axiomático, que inspirou a humanidade ao longo dos tempos (Breda et al., 2011).

No século XVI, Pedro Nunes, motivado pelos descobrimentos marítimos e como cosmógrafo-mor, foi investigando formas concretas de ajudar os nossos marinheiros a orientarem-se no mar e publicava essa "sua" Geometria num livro de "Álgebra". Ainda que não seja possível o acesso aos métodos de ensino da Geometria na época, atrevo-me a identificar algo semelhante a uma orientação curricular/didática num discurso do ilustre matemático português: "ainda que os triângulos venham primeiro do que os quadrados, trataremos primeiro dos quadrados,... porque por eles recebem os triângulos a sua medida." (Loureiro et al., 1997, p. 13).

> Nos princípios do século XX, (…) o estudo da Geometria, em especial, era suposto contribuir para o desenvolvimento de capacidades intelectuais desejáveis naqueles que ocupariam posições de chefia. Esta perspetiva orientava o ensino, então profundamente elitista, dirigido para uma minoria, enquanto a formação matemática para a maioria ou não existia ou limitava-se à aritmética elementar. (Abrantes 1994, citado por Ponte et al., 1997, p. 48)

Ponte et al. (1997) explicam de forma detalhada a evolução do ensino da matemática desde meados do século XX. Aí, de todos os ramos da Matemática, a Álgebra era aquele a que se atribuía um maior destaque. A Geometria, por sua vez, no 2º ciclo do antigo ensino liceal (atuais 7º, 8º e 9º anos de escolaridade) era ensinada de um modo muito próximo aos Elementos de Euclides. O lançamento do primeiro satélite artificial pela União Soviética, no final dos anos 50, é apontado como um fator preponderante na discussão e argumentação a favor de uma modernização do ensino da Matemática e das Ciências. Nos anos 60, viveu-se a fase experimental da Matemática Moderna, sob orientação de José Sebastião e Silva, tendo sido elaborados novos programas que viriam a vigorar até 1991. A contestação ao Movimento da Matemática Moderna, de forma mais ténue do que noutros países como Estados Unidos, chega a Portugal nos anos 80. As críticas eram dirigidas ao excessivo formalismo, gerador de exercícios estéreis e irrelevantes, não contribuindo para o desenvolvimento de competências no domínio do raciocínio e da resolução de problemas.

Os mesmos autores debruçam-se sobre o papel ou lugar que a Geometria tem assumido nos currículos ao longo dos tempos. As mudanças que agora se vivem no ensino, decorrentes das necessidades de uma sociedade cada vez mais exigente quer a nível social quer no plano tecnológico, impõem uma atualização permanente que facilite a tarefa de colocar os alunos perante experiências de aprendizagem interessantes e motivadoras. E importa referir que as alterações feitas ao currículo nacional são expectáveis:

> A evolução do currículo — embora muitas vezes dramatizada por alguns dos atores sociais — é um fenómeno perfeitamente normal. Um currículo pode vigorar durante mais ou menos tempo, conforme se revele mais ou menos adequado às suas funções e ao jogo das forças políticas e sociais a que se encontra submetido.

> Com a transformação acelerada da sociedade, característica deste final do século XX, é natural que os currículos passem a ter uma vida útil cada vez menor. (Ponte et al.,1997, p. 47)

Abrantes et al. (1999) reconhece que, de facto, os programas de Matemática demonstram a preocupação em alargar horizontes no ensino e na aprendizagem desta área de conhecimento. Na verdade, há muitas formas de encarar a Geometria como conteúdo de ensino. A importância dada à análise do espaço físico envolvente ganhou um destaque crescente e, neste sentido, Matos (1999) considera que o ensino da Geometria se inicia pela liberdade que se deve conferir aos alunos para organizar fenómenos espaciais e manipular esses meios de organização e não por familiarizar as crianças com estruturas matemáticas latas, estranhas à sua própria realidade. Estamos assim perante um cenário no qual se procura que a Geometria seja tida como um meio para a criança conhecer o espaço e o ambiente que a rodeia pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação que, de alguma forma, se assemelhe a situações do seu quotidiano:

> Para descrever, analisar e compreender o mundo físico recorremos muitas vezes à geometria. Ao confrontar os alunos com fenómenos geométricos (…), deixando-os resolver problemas geométricos simples, estes aprendem a compreender melhor o mundo à sua volta. (…). As crianças estão melhor preparadas para todas as tarefas escolares quando adquirem instrumentos de pensamento e competências geométricas e espaciais.
>
> Breda et al. (2011, p. 13)

Esta relação entre a Geometria e o "mundo físico" é exemplificada por diversos autores. Loureiro et al. (1997, pp. 14-15) referem que "a Natureza prefere certas formas em relação a outras possíveis", como é o caso do azeite que deitamos no caldo verde e que forma círculos na superfície da sopa em vez de outra forma geométrica, tal como o vento que na superfície das águas produz ondas com uma forma que não a quadrada, ou das colmeias que assumem o padrão hexagonal, bem como o facto de três bolinhas de sabão, feitas ao acaso e livremente, formarem sempre ângulos de 120º. Abrantes et al. (1999, pp. 61-62) recorrem a exemplos mais gerais, destacando a presença da Geometria "na produção industrial, no *design*, na arquitetura, na topografia, nas artes plásticas. (…), para uma pessoa se orientar, (…) fazer medições indiretas ou apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte (…), na comunicação."

De acordo com esta perspetiva, os mesmos autores (Abrantes et al., 1999) salientam a importância de se trabalhar, em sala de aula, capacidades em que a Geometria se assume como um meio privilegiado de desenvolvimento tais como a visualização espacial, a verbalização de ideias e raciocínios e a intuição. Loureiro et al. (1997) resumem todas as potencialidades da Geometria em três qualidades que se baseiam no desenvolvimento que esta área favorece do "conhecimento do mundo real", do "processamento e interpretação visuais" e do "raciocínio lógico/dedutivo" (p. 14). Sendo a Geometria uma boa fonte de problemas matemáticos, todas as capacidades anteriormente referidas são agentes não só necessários como também promotores do desenvolvimento de uma outra capacidade: a resolução de problemas. Os mesmos autores dão ainda outro contributo para a argumentação que justifica a obrigatoriedade do ensino deste tema – a Geometria em todo o mundo: "Contribuir para o desenvolvimento simultâneo de tão importantes e tão diversificadas capacidades não está ao alcance de qualquer tópico que se ensine" (p. 14).

Pelo que foi explicitado anteriormente, em termos das atuais recomendações emanadas da investigação produzida na educação matemática, o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos revela-se a intenção principal do ensino da Geometria. Até porque, tal como Loureiro (2009, p. 61) refere, ao indicar vários autores como Duval, Goldin e Battista, é "amplamente assumido que um dos grandes valores da Geometria é o seu contributo para a representação e para a visualização, e vice-versa". De facto, todas estas perspetivas são apresentadas tanto na investigação, já há décadas, como nos currículos (ou documentos de apoio aos mesmos). No entanto, segundo Loureiro et al. (1997, pp. 10-11), os professores que estão verdadeiramente no terreno e que podem efetivamente expressar a sua opinião relativamente às consequências positivas ou não que a aplicação das medidas curriculares tem tido na aprendizagem dos alunos, consideram que

> a verdadeira Geometria vê-se, mais vezes do que seria desejável, ensombrada pelo mecanicismo da Aritmética e/ou da Álgebra nas suas formas menos naturais, isto é, com fórmulas e receitas e respetiva memorização que estão muito longe do conhecimento do mundo real, do processamento e da interpretação "visuais" e do raciocínio lógico/dedutivo que costumava caracterizar a Geometria nos seus mais nobres atributos, independentemente de ênfases históricas diversificadas: mais aritméticas (para os Babilónicos e para os Egípcios), mais axiomáticas (para os

> Gregos e para Hilbert), ou mais algébricas (para Descartes, depois de Viète e para Monge).

2.1.2. O raciocínio geométrico

De modo a explicitar o conceito de raciocínio geométrico, cito Battista (2007, p. 843), segundo o qual este tipo de pensamento “consiste, em primeiro lugar e antes de mais, na invenção e utilização de sistemas conceptuais formais para investigar as formas e o espaço”. O mesmo autor refere que parte do pensamento geométrico é baseada no raciocínio espacial: a capacidade de observar, interpretar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial implica, deste modo, “construir e investigar imagens de modo a responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre as imagens, e manter as mesmas ao serviço de outras operações mentais” (p. 843). Esta perspetiva orienta-nos para a valorização do raciocínio geométrico que Duval (1998) faz ao destacar o facto de a Geometria ser a área da Matemática que mais propicia a descoberta e o desenvolvimento de diferentes modos de raciocínio, defendendo que a forma de se chegar a um ensino da Geometria para todos é insistir num trabalho de fortaleça as capacidades de representação visual e as capacidades de raciocínio, favorecendo a complementaridade entre elas. O mesmo autor (citado por Loureiro, 2009) refere que a predisposição que os alunos têm neste processo de visualização pode regredir ou perder-se com um ensino desajustado nesta área.

Para se compreender melhor o raciocínio geométrico, torna-se importante conhecer a natureza dos objetos[1] sobre os quais os alunos trabalham ou operam quando desenvolvem esse raciocínio (Pinheiro & Carreira, 2013; Ponte et al., 1997). Loureiro (2009) refere que, no entanto, o trabalho em Geometria não se deve centrar apenas nos objetos geométricos, devendo atender às ações que poderão ser aplicadas sobre eles.

[1] Na investigação em Geometria, os autores consideram objetos ou entes geométricos as estruturas que servem de base a qualquer teoria, axioma, postulado ou teorema; são os “seres” que a Matemática estuda; quanto à sua natureza podem ser concretos (números, grandezas e outros) ou abstractos (pontos, retas e outros); a natureza dos objetos está também condicionada pela perspetiva em que é analisada, isto é, consoante seja feita à luz de uma conceção idealista ou realista. (Pinheiro & Carreira, 2013; Ponte et al., 1997).

Aliás, o desenvolvimento do raciocínio geométrico deverá advir de uma diversidade de ações e representações adaptadas ao raciocínio a desenvolver.

Na verdade, a Geometria lida com um tipo particular de objetos, as figuras geométricas, que "podem ser consideradas entidades mentais duplas, nas quais participam dois aspectos: o figurativo e o conceptual" (Mariotti, 1992, pp. 9-10). Mariotti e Fischbein (1997, p. 220) estabelecem a distinção entre os dois termos apresentados anteriormente: "O aspecto figurativo associa-se, assim, à espacialidade (forma, posição e magnitude)", enquanto o aspeto conceptual se relaciona "com o abstracto e a natureza teórica que os conceitos geométricos partilham com todos os outros conceitos". Esta distinção referida por Mariotti (1992) torna-se mais clara com a diferenciação entre estruturação espacial e estruturação geométrica, esclarecida por Battista (2008, citado por Brunheira & Ponte, 2016, pp. 343 – 344):

> A estruturação espacial é um tipo especial de abstracção correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objecto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam. A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial através de conceitos formais, tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objecto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente.

Segundo a Brochura de Geometria para o 10.º ano (Loureiro et al., 1997, p. 12) existem muitas falhas nas nossas escolas no que diz respeito ao Ensino da Geometria. Das enumeradas pelos autores, algumas parecem estar na causa ou no ponto de partida para o fraco desenvolvimento do raciocínio geométrico que se verifica nas aulas de Matemática das escolas portuguesas. A primeira, "o não reconhecimento do mundo que nos rodeia" aponta para o facto de os professores não recorrerem a situações quotidianas ("qualquer fotografia de uma calçada portuguesa, um prédio em construção, um jardim arranjado por um jardineiro, qualquer cesto, um pote de barro ou uma panela de alumínio") como matéria-prima para discussões proveitosas na aula. Outras três falhas apontadas, que se condensam na "incapacidade nas representações gráficas (bidimensional e tridimensional), (…) verbais [ou] (…) espaciais dos entes ou conceitos geométricos", são seguidas de algumas sugestões para a capacitação dos alunos, como as visitas a museus ou galerias de arte e o recurso a ferramentas manipulativas na construção e exploração de figuras geométricas. A desconsideração pelas potencialidades lógico-dedutivas do raciocínio geométrico, a última falha enumerada, não diz respeito à teorização formal de cariz axiomático pois tal não se adequaria tanto para o nível básico como secundário do ensino da Matemática. Defende-se, sim, o recurso às potencialidades do raciocínio geométrico para o estabelecimento de certezas na resolução de problemas.

Pinheiro e Carreira (2013) defendem que as orientações curriculares no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 estão de acordo com a investigação indo ao encontro do desenvolvimento da visualização. O programa explicita o reconhecimento da Geometria como uma área de excelência para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Deste modo, fazendo uma comparação entre este parágrafo e o anterior, ressaltam questões como as que Loureiro et al. (1997, p. 13) lançam: "Vale a pena continuar a apostar no Ensino da Geometria? (…) justifica-se, por parte dos professores, um esforço adicional no seu trabalho por forma a melhor ensinar Geometria aos seus alunos?". Mas, uma vez mencionada e esclarecida a importância da Geometria no início deste capítulo, penso que estas perguntas têm já resposta: sim, vale a pena e sim, justifica-se. Vale a pena um ensino da Geometria que dê lugar ao desenvolvimento do raciocínio geométrico e sim, justifica-se um esforço no sentido de dar aos alunos oportunidades de reconhecerem a importância deste ramo tão forte da Matemática.

2.2. Os níveis de van Hiele

Tal como referido anteriormente, não se pode ignorar o facto de que, apesar da importância da Geometria, os estudantes continuam a ter dificuldades em aprendê-la com a profundidade desejada e de forma significativa. Porém, só com o conhecimento e compreensão das conceções dos alunos é que se poderá desenvolver uma metodologia em aula que fomente o desenvolvimento do raciocínio geométrico e o interesse dos alunos pela Geometria. Na tentativa de compreender essas conceções e perceções, desde há muito se tem investigado e construído teorias a partir da investigação.

A teoria de van Hiele tem início em 1957 com as dissertações de doutoramento do casal holandês de professores de Matemática: Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele. A singularidade desta teoria está nos três aspetos que estão considerados na sua origem: a existência de níveis, as propriedades desses mesmos níveis e o movimento de um nível para o seguinte (Pegg, 1992; Usiskin, 1982). Tratarei de aprofundar cada um desses aspetos neste capítulo, sendo que o último dos três é desenvolvido ao longo da abordagem feita aos dois primeiros.

2.2.1. A existência de níveis

A teoria de van Hiele apareceu no sentido de esclarecer o porquê de tantos alunos revelarem tantas dificuldades em processos cognitivos complexos, particularmente na demonstração que era um requisito para a disciplina de Geometria no ensino secundário, na época. Defendiam então que os alunos que manifestam essas dificuldades estariam a ser impulsionados a pensar num nível superior ao que, na realidade, se encontravam (Usiskin, 1982). E assim, a causa para as falhas no currículo tradicional de Geometria estaria no facto de o currículo ter sido pensado num nível superior ao dos alunos e consequentemente eles poderiam não entender o professor nem o professor a eles (De Villiers, 2010). Segundo Swoboda e Vighi (2016), estes níveis definem a estrutura hierárquica da construção do conhecimento em Geometria.

De acordo com a teoria de van Hiele existem então cinco níveis de pensamento em Geometria. Os cinco níveis teóricos de desenvolvimento em Geometria inicialmente propostos por Pierre van Hiele (reconhecimento, análise, ordem, dedução e rigor) foram posteriormente reduzidos, pelo próprio autor, para três níveis por meio de uma junção dos três últimos (Loureiro et al., 1997). Neste estudo, assumirei a composição de cinco níveis. As designações atribuídas aos níveis na investigação portuguesa são várias devido à multiplicidade de traduções possíveis para os nomes dados por van Hiele. Optarei por assumir uma terminologia semelhante à de Loureiro et al. (1997), à exceção do nome dado ao primeiro nível ("visualização" ao invés de "reconhecimento") e ao terceiro nível ("dedução informal" ao invés de "ordem"). A numeração dos níveis também é variável. Alguns autores assumem uma numeração idêntica à de van Hiele, isto é, do nível 0 ao 4 (Breda et al., 2011), enquanto outros adotam a do nível 1 ao 5 (Usiskin, 1982) esta última da minha preferência pois o nível 0 tende a ser associado ao de “pré-visualização” que foi posteriormente acrescentado por outros autores.

2.2.2. Propriedades dos níveis

Segundo Usiskin (1982), ao contrário de uma teoria meramente especulativa, as teorias científicas, por serem sujeitas a testes rigorosos futuros, devem ser claras e detalhadas o suficiente para que se possam definir os melhores instrumentos para esses mesmos testes. Assim, tanto a “precisão descritiva” como o “poder preditivo” devem aliar-se na fundamentação de uma teoria que se diz científica (p. 8). A teoria de van Hiele tem presentes esses dois atributos de modo que se fundamenta em descrições de comportamentos dos alunos nos vários níveis e prediz outros tantos.

Ainda antes de referir as propriedades de cada um dos níveis em particular, ressalvo algumas características que são comuns a todos os níveis e que esclarecem e aprofundam as bases desta teoria. Clements e Battista (1992), por exemplo, referem que os pilares da teoria de van Hiele assentam nas seguintes características: a aprendizagem é feita segundo cinco níveis de conhecimento; os níveis de conhecimento são sequenciais e hierárquicos; os conceitos implicitamente percebidos num nível tornam-se explicitamente percebidos no nível seguinte e cada nível tem a sua linguagem, o seu conjunto de símbolos e de relações entre eles. Jaime e Gutiérrez (1990), para o reconhecimento da devida importância de o professor conhecer o nível de raciocínio em que estão os seus alunos, ressalvam que um aluno só poderá entender os conteúdos matemáticos abordados pelo professor quando este o fizer de acordo com o seu nível de pensamento. E, como consequência, se uma relação matemática não é possível de ser explicada no nível de pensamento do aluno, então o professor deve optar por esperar até que o aluno atinja o estádio de desenvolvimento do raciocínio necessário. Esta espera não significa uma inércia por parte do professor, assim, o docente, embora não possa obrigar o aluno a raciocinar de uma determinada forma, deve ajudá-lo e criar oportunidades que o permitam evoluir para o nível seguinte[2]. Isto porque, segundo van Hiele, estes níveis são atingidos a partir de um ensino e de experiências de aprendizagem especializados e não dependem, como para Piaget, de questões cronológicas de maturidade (Loureiro et al., 1997).

Após uma breve descrição de cada um dos níveis, apresento alguns exemplos dados por autores que recolheram frases de alunos, ou fizeram interpretações ou predições de comportamentos esperados. Os mesmos autores apresentam as frases sem qualquer contextualização da situação envolvente.

Nível 1: visualização

Neste nível, os estudantes reconhecem, visualmente, as figuras através da sua aparência global, isto é, como um todo, conseguindo reconhecer um triângulo, um quadrado, um paralelogramo ou outra figura pela sua forma (De Villiers, 2010). Assim, o reconhecimento e classificação de figuras que fazem baseiam-se na comparação, em semelhanças ou diferenças físicas globais entre figuras (Jaime & Gutiérrez, 1990). Os alunos neste nível têm uma perceção das figuras como objetos individuais, isto é, não conseguem generalizar as características que reconhecem numa figura a outras da mesma classe (Jaime & Gutiérrez, 1990). Quando aprendem os nomes das figuras e pensam nos conceitos geométricos (básicos), os seus raciocínios são dominados pela perceção visual e não por uma análise das propriedades geométricas (Burger & Shaughnessy, 1986).

Jaime e Gutiérrez (1990) ressalvam que embora o primeiro nível corresponda, sem sombra de dúvidas, ao nível mais elementar do pensamento geométrico e, por isso, associado aos primeiros anos da aprendizagem da Geometria, não é exclusivo dos mesmos. Na realidade, qualquer estudante em qualquer nível, quando se confronta com

[2] Dina van Hiele (1957, cit. por Usiskin, 1982), aponta 20 aulas para a transição do primeiro para o segundo nível e 50 aulas para um aluno conseguir evoluir do segundo para o terceiro nível.

algum conceito geométrico novo, tende a passar pelo primeiro nível, durante mais ou menos tempo (por vezes pode ser mesmo rápido).

Quadro 1: Exemplos/referências ao primeiro nível de van Hiele.

1	"Um retângulo e um quadrado parecem coisas diferentes" (Usiskin, 1982, p. 4)
2	"Recorrem frequentemente a protótipos visuais de figuras e são facilmente induzidos em erro pela orientação das figuras" (Burger & Shaughnessy, 1986, p. 4)
3	"Podem dizer que uma figura é um retângulo porque se parece com uma porta" (Battista, 2007, p. 851)
4	"Podem identificar um quadrado como uma figura que tem dois lados horizontais e dois verticais" (Battista, 2007, p. 851)
5	"Constroem definições/ descrições incompletas por verem condições necessárias como condições suficientes" (Burger & Shaughnessy, 1986, p. 5)
6	"Um losango não é um paralelogramo. Um losango parece… um bocado diferente." (van Putten, 2008, p. 40)
7	"Percecionam relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos ou do contexto em que estão imersos." (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)
8	"Dominam os conceitos mais elementares (…) de lado e ângulo, congruência, perpendicularidade e paralelismo no plano. No espaço, usa o conceito de vértice, aresta e face." (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)

Nível 2: análise

Os estudantes que raciocinam no segundo nível começam a analisar as propriedades de algumas figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrever essas mesmas propriedades, no entanto não conseguem interrelacionar essas propriedades ou as próprias figuras (Jaime & Gutiérrez, 1990). Não conseguem fazer uma descrição económica das figuras, listando uma série de propriedades que lhes são visíveis, muitas das quais são desnecessárias ou irrelevantes, visto que a formulação de definições económica obriga ao estabelecimento de relações entre uma propriedade e outra, o que exige o uso de algum raciocínio inferencial. Estas descrições ou conceptualizações podem variar muito quanto ao grau de sofisticação, consoante o subnível[3] em que o aluno se encontrar (Battista, 2007; De Villiers, 2010; van Putten, 2008). Ao contrário dos alunos que se encontram no primeiro nível, os que pensam ao nível da análise já conseguem reconhecer que uma figura, embora um todo, é constituída por partes ou elementos (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Quadro 2: Exemplos/referências ao segundo nível de van Hiele.

1	"Um retângulo, para o aluno, é um quadrilátero com lados paralelos dois a dois, ângulos retos, lados opostos iguais, etc." (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 308)
2	"Os estudantes, neste nível, conseguem dizer por que razão um retângulo é um retângulo e não um cubo" (van Putten, 2008, p. 39)
3	"As figuras já são identificadas por algumas propriedades… se eu traçar uma figura com tamanhos e orientações diferentes mas todas com quatro ângulos retos, o aluno sabe que são retângulos" (van Putten, 2008, p. 40)
4	"(…) um aluno que saiba as propriedades de um losango e consiga enumerá-las, conseguirá ter uma noção básica de um triângulo isósceles, tomado como um semi-losango" (van Putten, 2008, p. 40)

[3] Battista (2007) defende a existência de subníveis como estádios de desenvolvimento de um determinado nível. Assim, o subnível 2.1, por exemplo, corresponde a uma fase em que o aluno produz descrições geométricas completamente informais e imprecisas evoluindo para o subnível 2.2 e posteriormente para o 2.3 onde já consegue fazer uso de conceitos geométricos formais.

5	“as propriedades ainda não estão organizadas de modo a que um quadrado seja considerado um retângulo” (Usiskin, 1982, p. 10)
6	“Percecionam relações geométricas associadas a elementos visíveis das figuras em qualquer posição ou contexto.” (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)
7	“Percecionam relações geométricas associadas a elementos invisíveis das figuras, mas esta perceção pode depender da posição das figuras e dos seus elementos.” (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)
8	“No plano, utiliza os conceitos de eixo de simetria, diagonal, mediatriz, ponto médio e as transformações geométricas.” (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)

Nível 3: dedução informal[4]

O aluno é agora capaz de fazer deduções acerca de algumas propriedades e consegue acompanhar uma argumentação lógica e simples de um prova com recurso a definições ou propriedades por ele conhecidas, não conseguindo no entanto estabelecer um raciocínio formal[5] (van Putten, 2008, p. 39-41). Battista (2007) refere que os estudantes já conseguem estabelecer inferências acerca das propriedades, operando sobre elas, não sobre as imagens (ao contrário do que acontecia no primeiro nível, em que as imagens eram o suporte e a origem de qualquer propriedade). Segundo Jaime e Gutiérrez (1990), este é o nível em que se inicia a capacidade de reconhecer que umas propriedades se podem deduzir de outras e conseguem mesmo agrupar as figuras em famílias que partilham algumas propriedades, formulando definições matematicamente corretas e formais e reconhecendo a importância das mesmas. Os

[4] Alguns autores (Battista, 2007; Jaime e Gutiérrez, 1990) dão o nome de “classificação” (*classification* ou *classificación*) a este nível devido à reorganização que o processo de classificação sofre.

[5] Atendendo novamente os subníveis considerados por Battista (2007), sabe-se que no 3.1 os alunos recorrem a evidências empíricas para concluir que “Se uma figura tem uma propriedade, então tem outra” (p. 852) até que no subnível 3.4 já conseguem reorganizar a classificação das formas em famílias de forma lógica e hierárquica e da mesma forma são capazes de justificar a nova hierarquia que agora estabelecem.

mesmos autores consideram que embora os estudantes consigam acompanhar os passos de uma demonstração que lhes seja apresentada pelo professor e/ou no manual, não são capazes de construir eles próprios uma demonstração seguindo uma série de passos de forma encadeada e pensada. Da mesma forma que não conseguem realizar raciocínios lógicos formais, também não reconhecem a sua necessidade.

Quadro 3: Exemplos/referências ao terceiro nível de van Hiele.

1	"Consegue seguir o raciocínio: se dois ângulos adjacentes de um paralelogramo são iguais e um seu ângulo é reto, então trata-se de um quadrado" (van Putten, 2008, p. 39)
2	"no estudo dos quadriláteros, os alunos poderão entender que a igualdade de ângulos opostos implica o paralelismo dos lados e que a igualdade dos lados implica a perpendicularidade das diagonais" (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 310)
3	"um estudante cuja definição de retângulo é ter quatro ângulos retos e lados opostos iguais consegue concluir que um quadrado é um retângulo pois «um quadrado tem quatro ângulos retos ,que o retângulo também tem de ter; um quadrado tem lados opostos iguais, que um retângulo também tem de ter" (Battista, 2007, p. 853)
4	"Percecionam relações geométricas associadas a elementos visíveis e invisíveis das figuras, independentemente da sua posição ou contexto." (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)
5	"Generalizam as relações geométricas para uma família de figuras." (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)
6	"No espaço, utilizam os conceitos de congruência, paralelismo e perpendicularidade." (Brunheira, 2016, citado por Brunheira & Ponte, 2016, p. 345)

Nível 4: dedução

Segundo Jaime e Gutiérrez (1990), uma vez alcançado este nível, o aluno consegue entender e realizar raciocínios lógicos formais e já entende a estrutura das demonstrações (que incluem vários passos), atribuindo importância às mesmas como meio de provar determinada afirmação ou resposta. Aceita a possibilidade de chegar ao mesmo resultado por premissas distintas, reconhecendo assim a existência de demonstrações alternativas do mesmo teorema e definições equivalentes do mesmo conceito. As demonstrações que constrói inserem-se num sistema axiomático, de modo que consegue distinguir e atribuir a cada termo a sua função, ou seja, faz o uso apropriado e propositado de teoremas, axiomas ou definições (Battista, 2007). A axiomatização matemática, para além de um papel argumentativo, assume aqui um caráter gerador de novo conhecimento, isto é, pode, a partir de informação dada, ser usada para gerar nova informação e igualmente válida. De forma natural, o aluno substitui e o pensamento intuitivo pelo pensamento lógico e dedutivo (van Putten, 2008).

Quadro 4: Exemplos/referências ao quarto nível de van Hiele.

1	"consegue distinguir uma proposição do seu oposto" (van Putten, 2008, p. 41)
2	"poderão fazer demonstrações formais das propriedades que já tinha demonstrado informalmente em níveis inferiores, assim como descobrir e demonstrar novas propriedades mais complexas; também estarão em condições de relacionar os quadriláteros com outras partes da geometria (euclidiana) que já estudaram" (Jaime & Gutiérrez,1990, p. 311)

Nível 5: rigor[6]

Neste nível, segundo van Putten (2008) atingível no ensino secundário, os alunos estabelecem relações entre os sistemas axiomáticos já trabalhados no nível anterior, comparando-os e reconhecendo as principais diferenças entre eles. As figuras são agora definidas simbolicamente.

[6] Este nível, por se verificar raramente em casos dos estudos realizados, carece de exemplos ilustrativos de respostas dadas por alunos neste nível.

2.2.3. A evolução em cada nível

Tal como refere Jaime e Gutiérrez (1990), a teoria de van Hiele é constituída por duas partes. A primeira, apresentada anteriormente, diz respeito à sequência dos níveis de raciocínio que, de forma descritiva, reconhece a evolução da capacidade do pensamento geométrico desde que um indivíduo inicia a aprendizagem da Geometria até que atinge o seu máximo desenvolvimento nesta área. A segunda parte, apresentada neste subcapítulo, procura dar aos professores diretrizes de como podem ajudar os alunos a alcançar um nível superior. A estas mesmas diretrizes dá-se o nome de "fases de aprendizagem" e constituem um critério para a organização e planeamento de tarefas ou atividades que se devem apresentar aos alunos de forma a favorecer a sua aprendizagem e a evolução no seu nível de pensamento. Estando na génese do meu estudo a análise do raciocínio geométrico dos alunos, estas orientações que são dedicadas aos professores não serão alvo de uma abordagem tão pormenorizada. Assim, resumidamente, apresento algumas considerações de Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) relativamente às fases de aprendizagem[7].

Fase 1 (informação): o professor constrói atividades que introduzam os alunos ao novo tema de estudo; as atividades servem também para que o professor se informe dos conhecimentos prévios dos seus alunos;

Fase 2 (orientação dirigida): os alunos começam a explorar o novo tema de estudo resolvendo atividades e problemas pensados com o objetivo de dirigi-los ao resultado correto, para que descubram, compreendam e aprendam os conceitos e propriedades básicos do tema em questão;

Fase 3 (explicitação): esta fase é transversal a todas as outras; os alunos apresentam e justificam os resultados e conclusões; o professor deve fomentar o diálogo e discussão de ideias; o vocabulário utilizado deve sempre ter em conta o nível de raciocínio em que se encontram os alunos;

Fase 4 (orientação livre): os alunos aplicam os conhecimentos adquiridos nas fases anteriores para resolver problemas mais complexos e situações novas e/ou

[7] Ver Anexo 1.

diferentes; o professor deve procurar que os alunos aprofundem conhecimentos, apoiando-se na segunda fase;

Fase 5 (integração): o professor deve procurar que os alunos atinjam uma visão global do tem estudado, integrando os novos conhecimentos numa rede que os relacione entre si e com outros conteúdos matemáticos abordados anteriormente (até mesmo em anos anteriores).

Capítulo 3: Unidade de Ensino

3.1. Caracterização do contexto

3.1.1. A escola

A Escola Secundária de Caneças é a sede do Agrupamento de Escolas de Caneças. Este agrupamento[8], do concelho de Odivelas, recebe alunos de meios diversificados: Casal de Cambra e Casal Novo (meio suburbano); Caneças (meio suburbano e rural, alguns destes alunos provêm de famílias com raízes na vila) e D. Maria, Almargem do Bispo, Camarões e outros (meio essencialmente rural, mas com um crescimento tendencialmente suburbano). Muitos dos alunos provêm de um meio social, económico e familiar bastante desfavorecido. A escolaridade da população é em geral baixa, havendo um grande número de famílias desestruturadas, com baixos rendimentos e um grande número de desempregados. Cerca de 40% dos alunos beneficiam de auxílios económicos, no âmbito da Ação Social Escolar (ASE).

Ainda assim, embora a população escolar tenha origens sociais diferenciadas, não se verificam segregações significativas de grupos ou núcleos de alunos com impacto na organização escolar. Considerando os valores de 2011, ano para o qual existem referências calculadas, as variáveis de contexto do Agrupamento (idade dos alunos, percentagem de alunos que não beneficiam dos auxílios económicos da ASE, média de alunos por turma, escolaridade dos pais e das mães e percentagem de docentes dos quadros) são globalmente desfavoráveis quando comparados com outras escolas de características semelhantes, o que permite concluir que a escola se insere efetivamente num contexto pouco favorecido.

[8] A caracterização do Agrupamento de Escolas de Caneças e da Escola Secundária de Caneças foi retirada do site oficial do agrupamento em questão (http://aecanecas.com/) e do respetivo projeto educativo 2014-2018 (disponível em http://aecanecas.com/images/docs/Projeto_Educativo_AE_Canecas.pdf).

O facto de alguns alunos provirem de famílias em que os pais possuem habilitações académicas ao nível do ensino básico e profissões de acordo com a sua escolaridade não constitui, no geral, um incentivo a um investimento na educação dos filhos. Muitos pais manifestam pouco interesse pela vida escolar dos filhos e aceitam o seu insucesso como natural e inevitável, não valorizando as aprendizagens escolares como uma mais-valia para a formação destes.

A agregação da Escola Secundária de Caneças ao anterior Agrupamento de Escolas de Caneças deu uma dimensão completamente diferente à oferta educativa do atual Agrupamento de Escolas de Caneças (Anexo 3), a partir de 2014-2015: desde o ensino pré-escolar até ao 12.º ano. No ensino de adultos, a Escola Secundária de Caneças é considerada uma escola de referência pelo CQEP, que iniciou a sua atividade em 2014, dando continuidade ao anterior CNO.

3.1.2. A turma

A turma na qual realizei a minha intervenção que deu origem a este relatório é uma das turmas de 9.º da Escola Secundária de Caneças, constituída por trinta alunos, treze dos quais são raparigas. Nesta turma existem dois alunos com Necessidades Educativas Especiais com adequações ao nível da avaliação. Do 8.º para o 9.º ano a turma sofreu algumas alterações (cinco retenções e três novos alunos), sendo que o núcleo maioritário de alunos se manteve.

Das classificações da turma no final do ano anterior, destaco a percentagem de insucesso (56,7%) na disciplina de Matemática que foi avaliada como aquela em que os alunos manifestaram mais desinteresse, desmotivação e baixas classificações, seguida da disciplina de Inglês (53,3%) e Físico-Química (33,3%).

No 1.º período do presente ano letivo, na disciplina de Matemática, a turma apresentava as seguintes classificações que se apresentam na tabela 1.

Tabela 1: Classificações da turma na disciplina de Matemática, no final do 1.º período do ano letivo 2016/2017.

Nível de classificação	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
N.º de alunos	1	20	8	1	0

O conselho de turma, realizado a 20 de dezembro de 2016, avaliou os alunos da turma como muito desinteressados pela escola, no geral, desinteresse e desmotivação esses que se refletem em frequentes faltas de atraso, de material necessário à participação plena nas tarefas propostas em aula, de trabalhos de casa e baixos rendimentos académicos. Embora se tivesse registado um decréscimo do número de participações disciplinares após a realização da reunião intercalar do conselho de turma, no 1.º período, a turma continuava a apresentar um comportamento global pouco propício ao bom desenvolvimento das atividades letivas.

O mesmo conselho de turma considerou que o aproveitamento da turma é, no geral, insuficiente, dado que vinte e dois dos trinta alunos se encontravam em situação que indiciava uma possível retenção. Acrescia ainda o facto de quinze dos alunos nesta situação terem visto ser-lhes atribuídas cinco ou mais classificações de nível inferior a três. Em termos globais, considerou-se que a falta de aproveitamento da maioria dos alunos da turma resultava, sobretudo, da falta de atenção e concentração nas atividades letivas, desorganização geral na participação, falta de autonomia e, acima de tudo, do pouco empenho no estudo e da falta de hábitos de trabalho regular. Ficou então acordado que todos os professores da turma deveriam procurar cativar os alunos com metodologias de ensino diversificadas e mais estimulantes, medida essa que tive em atenção tanto na preparação da minha futura prática letiva como na posterior concretização da mesma (este aspeto será retomado e explicitado ao longo deste capítulo).

3.2. Ancoragem da unidade de ensino no programa

A planificação anual para as turmas do 9.º ano (Anexo 4), organizada pelo grupo de professores de Matemática do 9.º ano do agrupamento, situa a subunidade "Ângulos e circunferência", em meados do 2.º período letivo. No entanto, devido às dificuldades demonstradas pelos alunos na aprendizagem da unidade "Equações", a lecionação da mesma prolongou-se mais do que o previsto em as turmas do 9.º ano da escola, de modo que a subunidade temática alvo do meu estudo foi lecionada apenas no final do 2.º período letivo.

No que diz respeito à Unidade de Geometria, faço um breve resumo e referência às competências e aprendizagens que se procuraram trabalhar e/ou desenvolver com a turma anteriormente à minha prática letiva, de acordo com o sugerido pelo Programa de Matemática para o Ensino Básico (Damião et al., 2013).

Quadro 5: Aprendizagens a realizar pelos alunos no âmbito da Geometria no 9.º ano (PMEB).

Axiomatização das teorias matemáticas **Vocabulário do método axiomático** **Axiomatização da Geometria**	· Identificar alguns termos e o respetivo significado: "teoria", "objetos primitivos", "relações primitivas", "axiomas" e "teoremas". · Distinguir e relacionar "condição necessária" de "condição suficiente", "tese" de "hipótese" e reconhecer essas distinções e/ou relações como uma ferramenta para desenvolver provas ou demonstrações. · Identificar os símbolos "$\wedge$", "$\vee$", "$\Rightarrow$" *e* "$\Leftrightarrow$" e reconhecer o seu significado num determinado contexto. · Demonstrar resultados que integrem implicações através da implicação recíproca. · Reconhecer a importância de alguns axiomas ou postulados, não vendo os mesmos como resultados a decorar, mas sim como meios para perceber algumas relações e deteção de erros em proposições falsas.
Pontos, retas e planos	· Identificar posições relativas de pontos e retas no plano, e de pontos, retas e planos no espaço. · Conhecer e reconhecer a importância de saber hierarquizar os conceitos matemáticos inerentes a estes conteúdos ("paralelas",

	“incidentes”, “estritamente paralelas”, “concorrentes”, “oblíquas”, etc.) para estudar a veracidade de determinadas proposições.
Medidas e distâncias	· Construir a definição de “distância” de um ponto ou reta a um plano e saber aplica-la.
Volumes e áreas	· Perceber, a quando do cálculo de volumes, em que situações se pode ou não fazer a decomposição desse mesmo sólido e reconhecer essa decomposição como meio de chegar a fórmulas de sólidos já conhecidas.
Pontos notáveis de triângulos	· Identificar “lugar geométrico” como o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma dada propriedade. · Saber fazer algumas demonstrações simples por construção e consciencializar para os erros consequentes da construção não totalmente rigorosa.

Dando continuidade ao tipo de trabalho desenvolvido na disciplina até ao momento de início da subunidade de ensino a que diz respeito este relatório, e tendo em conta as características da turma, estabeleci os seguintes objetivos de aprendizagem:

i. Conhecer o conceito de corda e arco de uma circunferência;
ii. Estabelecer relações entre cordas e arcos de uma circunferência;
iii. Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a amplitude do arco correspondente;
iv. Determinar a área de um setor circular;
v. Relacionar a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do arco correspondente;
vi. Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a amplitude do ângulo inscrito com o mesmo arco de circunferência;
vii. Relacionar a amplitude de um ângulo excêntrico com a amplitude dos arcos associados;
viii. Determinar o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo;
ix. Determinar o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo;
x. Inscrever um polígono regular numa circunferência;

xi. Identificar e utilizar raciocínio indutivo e dedutivo.

A planificação da subunidade de ensino relativa a este relatório incluiu a preparação de 15 aulas, 10 das quais com a duração de 90 minutos e outras cinco de 45 minutos, entre os dias 2 de março e 4 de abril. Duas das aulas foram reservadas para o esclarecimento de dúvidas para o teste sumativo e para a realização do mesmo, sendo esta última, assumida pela professora cooperante. Ainda que se admitisse a possibilidade de existirem algumas alterações aos planos de aulas estabelecidos, era muito importante que o mesmo tópico não se estendesse por muito mais tempo do que o previsto na minha planificação inicial. O motivo pelo qual tal não deveria acontecer prende-se com o facto de não ser conveniente que o estudo da unidade de Geometria se prolongasse até ao início do 3.º período, visto que, dessa forma, para além de se interromper a lecionação da unidade com as férias da Páscoa também se poderia comprometer a lecionação das unidades seguintes, o que teria consequências nefastas uma vez que os alunos teriam de realizar o exame final onde poderiam vir a ser avaliados nessas temáticas. O quadro seguinte (quadro 1) sintetiza a minha planificação para o ensino e aprendizagem da subunidade em análise: "Ângulos e circunferência".

Quadro 6: Planificação da subunidade de ensino "Ângulos e circunferência".

Aula	Tópicos	Tarefas e recursos
2017.03.02 (90 min)	· Elementos da circunferência;	· Vídeo de "Isto é Matemática"; · Tarefa "Arcos e cordas" (*Geogebra*) + Guião;
2017.03.06 (90 min)	· Propriedades de ângulos na circunferência; · Amplitude dos ângulos ao centro;	· Exercício de contexto real *(Geogebra);* · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.07 (45 min)	· Amplitude dos ângulos ao centro; · Propriedades geométricas em circunferências;	· Tarefa "Investigando a circunferência" (*Geogebra*); · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);

2017.03.09 (90 min)	· Comprimento do arco de circunferência; · Área do setor circular;	· Exercício de contexto real; · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.13 (90 min)	· Ângulos inscritos;	· Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.14 (45 min)	Revisões para o teste de avaliação	· Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.16 (90 min)	Realização do teste de avaliação	
2017.03.20 (90 min)	· Ângulos excêntricos;	· Tarefa "Ângulos excêntricos" (*Geogebra*); · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.21 (45 min)	· Ângulos de segmento; · Ângulos ex-inscritos;	· Tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos" (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.23 (90 min)	· Ângulos ex-inscritos;	· Continuação da tarefa; · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.27 (90 min)	· Ângulos internos e externos de um polígono;	· Tarefa "Ângulos internos de um polígono"; · Manual (exercícios de aplicação/consolidação);
2017.03.28 (45 min)	· Ângulos internos e externos de um polígono;	· Manual (exercícios de aplicação/consolidação);

2017.03.30 (90 min)	· Polígonos inscritos em circunferências;	· Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular"; · Tarefa "Construir polígonos regulares";
2017.04.03 (90 min)	Entrega e correção do teste de avaliação · Ângulos inscritos e ângulos excêntricos;	· Vídeo de "Isto é Matemática";
2017.04.04 (45 min)	Auto e heteroavaliação;	· Questionário.

Esta planificação assenta numa exploração não só a aplicação do raciocínio matemático ao mundo real, mas a descoberta da Matemática através do que nos rodeia, relacionando sempre que possível, o que for lecionado com o quotidiano dos alunos, envolvendo-os em atividades diversificadas, interessantes e motivadoras. No mesmo sentido, na unidade de ensino dei lugar ao trabalho com materiais didáticos, entre os quais a tecnologia que, para além das outras vantagens a nível da aprendizagem que resultam da sua utilização, é uma forma de cativar os alunos mais desmotivados alargando os horizontes das suas aprendizagens.

3.3. Conceitos matemáticos

Apresentam-se agora os conceitos matemáticos trabalhados em aula durante a minha intervenção letiva, subjacente à subunidade "Ângulos e circunferência". Estes conceitos fazem parte do programa curricular de Matemática para o 3.º ciclo e estão de acordo com as metas curriculares e com o manual adotado pela escola e consequentemente utilizado pela turma na disciplina de Matemática (Magro, Fidalgo & Louçano, 2015). As definições presentes no manual são retiradas diretamente do Programa de Matemática para o 3.º ciclo (Damião et. al, 2013).

3.3.1. Arcos e cordas de uma circunferência

Dada uma circunferência, um segmento de reta que une dois dos seus pontos diz-se uma **corda**. Chama-se **ângulo ao centro** a todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. A interseção de uma dada circunferência com um ângulo ao centro designa-se por **arco de circunferência**. Os pontos de interseção da circunferência com os lados do ângulo designam-se por **extremos do arco**.

Na Figura 2 estão representados uma circunferência de centro O, o ângulo ao centro AOB, o arco de extremos A e B e a corda [AB]. O arco determinado pelo ângulo convexo AOB, designa-se por **arco menor AB** ou, simplesmente, **arco AB**. O arco determinado pelo ângulo côncavo AOB designa-se por **arco maior AB**.

Sendo P um ponto do arco maior AB, é também possível representar o arco AB por **arco APB**. Os arcos de extremos A e B designam-se por **arcos subtensos** pela corda [AB]. Em particular, o arco menor AB diz-se o **arco correspondente à corda AB**.

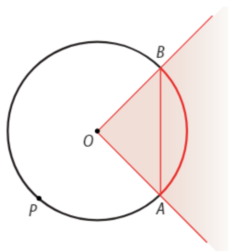


Figura 2

A medida da amplitude de um arco de circunferência é igual à medida da amplitude do ângulo ao centro correspondente. A amplitude do ângulo AOB representa-se por $A\hat{O}B$. A amplitude do arco AB representa-se por AB (Figura 2).

Tem-se que:

Qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda divide a corda e cada um dos arcos subtensos em duas partes geometricamente iguais, assim tem-se que os segmentos de reta [DG] e [GC] são geometricamente iguais, os arcos DE e EC são geometricamente iguais e os arcos DF e FC são também geometricamente iguais (**Erro! A origem da referência não foi encontrada.**).

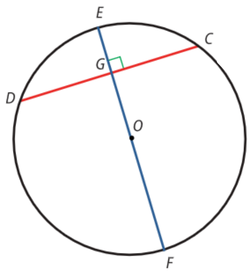


Figura 3

Arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, assim como as cordas correspondentes a esses arcos.

Um **segmento de círculo** é a região do círculo compreendida entre uma corda e o arco por ela subtenso. Este diz-se **maior** quando o arco que o subtende for maior e **menor** quando o arco for menor (Figura 4).

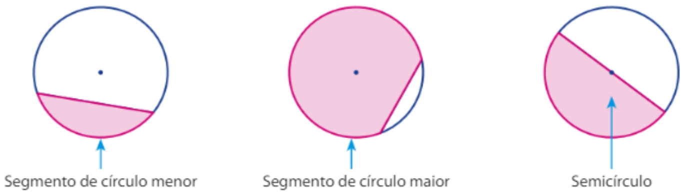


Figura 4

Um setor circular é a interseção de um ângulo ao centro com o círculo (Figura 5).

Figura 5

3.3.2. Relação entre cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes

São apresentadas em seguida algumas propriedades da circunferência (Figura 6).

· Numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem arcos e cordas geometricamente iguais.

· Numa circunferência, a arcos geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro e cordas geometricamente iguais.

· Numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro e arcos geometricamente iguais.

As relações anteriores também se verificam se em vez de se considerar uma só circunferência, se considerarem circunferências geometricamente iguais.

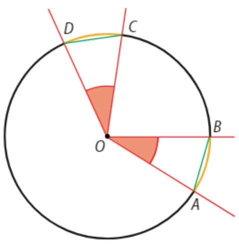


Figura 6

3.3.3. Comprimento de um arco de circunferência e área de um setor circular

Na mesma circunferência ou em circunferências geometricamente iguais, os comprimentos dos arcos são diretamente proporcionais às amplitudes dos ângulos ao centro que lhes correspondem.

Sabendo que à circunferência está associado um ângulo ao centro com 360° de amplitude, para determinar o comprimento de um arco com x graus de amplitude pode ser utilizada a seguinte proporção:

$$\frac{comprimento\ do\ arco}{comprimento\ da\ circunferência} = \frac{x°}{360°}.$$

De onde vem que:

$$comprimento\ do\ arco = \frac{x° \times comprimento\ da\ circunferência}{360°} = \frac{x° \times 2 \times \pi \times r}{360°}.$$

Assim, considerando o exemplo apresentado na Figura 7 pode calcular-se o comprimento do arco AB:

$$comprimento\ do\ arco\ AB = \frac{100° \times 2 \times \pi \times 4}{360°} = \frac{800\pi}{360} = \frac{20\pi}{9} \cong 6{,}981\ cm$$

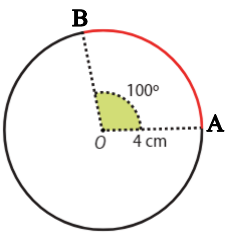


Figura 7

De forma semelhante tem-se que, na mesma circunferência ou em circunferências geometricamente iguais, as áreas dos setores circulares são diretamente proporcionais às amplitudes dos respetivos ângulos ao centro.

Assim, dado um ângulo ao centro com x graus de amplitude, tem-se:

$$\frac{área\ do\ setor\ circular}{área\ do\ círculo} = \frac{x°}{360°}$$

Logo,

$$área\ do\ setor\ circular = \frac{x° \times área\ do\ círculo}{360°} = \frac{x° \times \pi \times r^2}{360°}$$

Considerando, uma vez mais, um exemplo concreto (Figura 8) calcula-se a área do sector circular destacado:

$$área\ do\ setor\ circular = \frac{140° \times \pi \times 3^2}{360°} = \frac{1260\pi}{360} = \frac{7\pi}{2} \cong 10{,}996\ cm^2$$

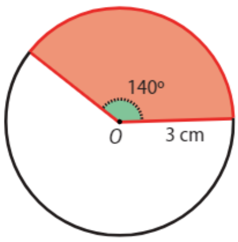


Figura 8

3.3.4. Ângulos excêntricos

Os ângulos que não têm o vértice no centro da circunferência chamam-se **ângulos excêntricos**. Os ângulos excêntricos podem ter o vértice sobre a circunferência, no seu interior (excluindo o caso em que o vértice está sobre o centro) ou no seu exterior (Figura 9).

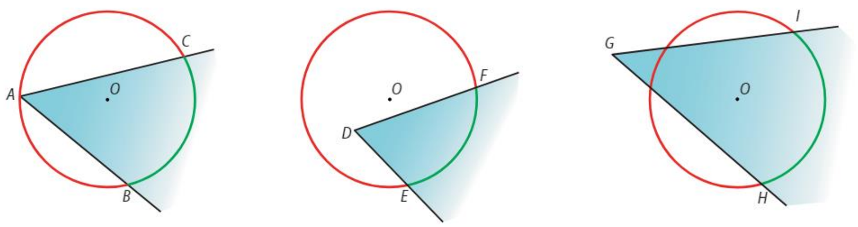


Figura 9

→ **Ângulo inscrito num arco de circunferência**

Chama-se **ângulo inscrito num arco de circunferência** a todo o ângulo que tem vértice no arco e distinto dos extremos e cujos lados passam pelos extremos do arco. O arco de circunferência diz-se o **arco capaz** do ângulo.

Considerando a Figura 10, o **ângulo CAB está inscrito no arco CAB**, ou seja, **CAB é o arco capaz do ângulo CAB**. O arco BC diz-se o **arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito**.

Todo o ângulo inscrito num arco de circunferência é um ângulo excêntrico.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Na Figura 10, $C\hat{A}B = \frac{1}{2}BC$.

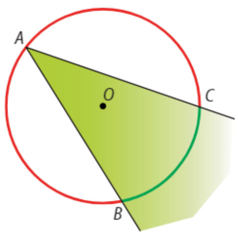


Figura 10

Pode então afirmar-se que:

· Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais.

Na Figura 11 como BDC, BAC e BGC são ângulos inscritos num arco de circunferência, então $B\widehat{D}C = B\widehat{A}C = B\widehat{G}C = \frac{BC}{2}$, logo $B\widehat{D}C = B\widehat{A}C = B\widehat{G}C = \frac{92°}{2} = 46°$.

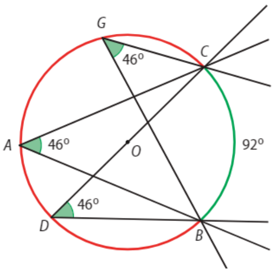


Figura 11

Pode então afirmar-se que:

· Ângulos inscritos numa semicircunferência são ângulos retos.

Na Figura 12, $D\widehat{E}C = D\widehat{F}C = D\widehat{H}C = D\widehat{G}C = \frac{DC}{2}$, logo $D\widehat{E}C = D\widehat{F}C = D\widehat{H}C = D\widehat{G}C = \frac{180°}{2} = 90°$.

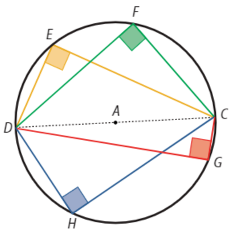


Figura 12

→ **Ângulo de segmento**

Um ângulo com vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro lado tangente à circunferência designa-se por **ângulo de segmento**.

Um ângulo de segmento tem amplitude igual a metade da amplitude de um arco compreendido entre os seus lados. Na Figura 13 , o ângulo AVB é um ângulo de segmento e $A\hat{V}B = \frac{1}{2}VB$.

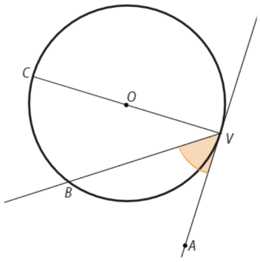


Figura 13

→ Ângulo ex-inscrito num arco de circunferência

Um **ângulo ex-inscrito num arco de circunferência** é um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar. A amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos seus lados contêm.

Considerando a Figura 14, o ângulo CVA diz-se ex-inscrito e $A\hat{V}C = \frac{BV+AV}{2}$.

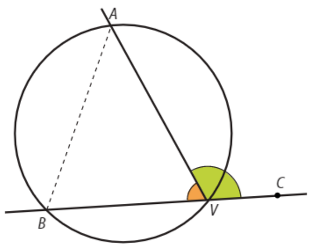


Figura 14

→ Ângulo convexo com vértice no interior de um círculo

O ângulo AVB ilustrado na Figura 15 é um ângulo convexo com vértice no interior do círculo de centro O.

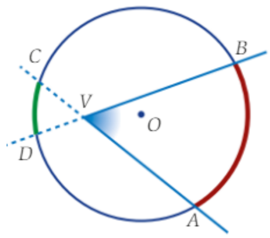


Figura 15

Com a tarefa "Ângulos excêntricos" (Anexo 9) e através da manipulação geométrica que o *Geogebra* permite, impulsiona-se a descoberta de um método pelo qual se pode calcular a amplitude de um ângulo convexo com vértice no interior do círculo, começando por identificar (numa construção semelhante à da Figura 16) a corda $[CB]$ e reconhecer que os ângulos CBD e BCA estão inscritos em arcos de circunferência, estabelecendo a devida relação entre a amplitude desses mesmos ângulos e os arcos CD e AB, respectivamente. Conclui-se, por fim, que a amplitude de um ângulo convexo com vértice no interior de um círculo é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e entre os prolongamentos dos seus lados, isto é, $A\hat{V}B = \frac{AB+CD}{2}$.

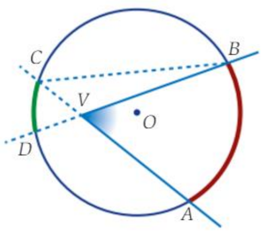


Figura 16

→ Ângulo convexo com vértice no exterior de um círculo cujos lados o intersetam

Na Figura 17 observam-se três exemplos de ângulos convexos com vértice no exterior do círculo cujos lados o intersetam.

Também pela tarefa "Ângulos excêntricos" (Anexo 9) com recurso ao *Geogebra,* pode levar-se os alunos a descobrir o modo de calcular a amplitude de um ângulo convexo com vértice no exterior do círculo, começando por identificar (numa construção semelhante à da Figura 18) a corda $[PH]$ e reconhecer que os ângulos PHR e APH estão inscritos em arcos de circunferência, estabelecendo a devida relação entre a amplitude desses mesmos ângulos e os arcos PR e AH, respectivamente. Conclui-se, por fim, que a amplitude de um ângulo convexo com o vértice no exterior de um círculo cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados, ou seja, $PQR = \frac{PR-AH}{2}$.

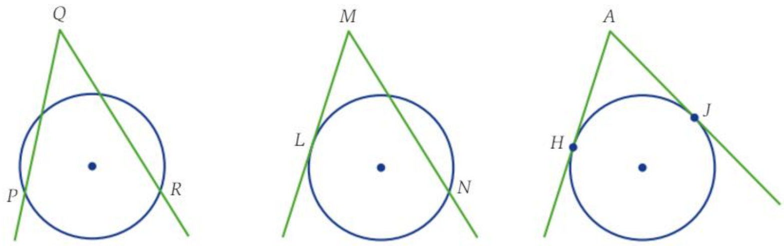


Figura 17

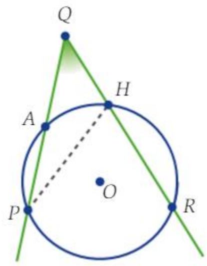


Figura 18

3.3.5. Ângulos internos e externos de um polígono convexo

Um **ângulo interno** de um polígono convexo é formado pelas semirretas com origem comum num vértice do polígono e que contem dois lados consecutivos do polígono. Um **ângulo externo** é formado por um dos lados do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo. Cada ângulo interno é adjacente a um ângulo externo e suplementar do mesmo (Figura 19).

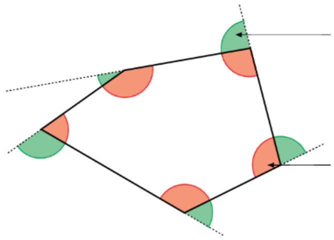


Figura 19

→ Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Com a realização da tarefa "Ângulos internos de um polígono", por um processo de raciocínio assente na conjetura e na verificação experimental e particular dessa mesma conjetura, podem retirar-se as conclusões seguintes: um polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n-2$ triângulos, traçando as diagonais desse polígono a partir de um determinado vértice; a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados (S_i) é dada pela expressão $\boldsymbol{S_i = (n-2) \times 180°}$ visto que a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos é $180°$.

Como um polígono convexo com n lados tem também n ângulos internos, então a amplitude de um ângulo interno (α_i) de um <u>polígono regular</u> com n lados é dada pela expressão $\boldsymbol{\alpha_i = \frac{(n-2) \times 180°}{n}}$.

→ Soma dos ângulos externos de um polígono convexo

Dado um polígono convexo com n lados, como cada ângulo externo é suplementar de um ângulo interno, sendo S_e a somas das amplitudes dos ângulos externos do polígono, tem-se que $S_i + S_e = n \times 180°$. Resulta daqui que $(n-2) \times 180° + S_e = n \times 180°$ pelo que $S_e = 360°$. Portanto, a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo com n lados é $360°$. Assim, a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo não depende do seu número de lados.

Embora o processo anteriormente descrito pareça intuitivo, deve ter-se em conta possíveis dificuldades dos alunos em estabelecer o raciocínio adjacente, tendo eu optado por um método baseado na visualização como o apresentado na Figura 20.

Como um polígono convexo com n lados tem também n ângulos externos, então a amplitude de um ângulo externo (α_e) de um polígono regular com n lados é dada pela expressão $\boldsymbol{\alpha_e} = \frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}$**.** Neste âmbito deve recordar-se que um polígono regular se caracteriza por ter todos os lados geometricamente iguais e os seus ângulos também eles geometricamente iguais.

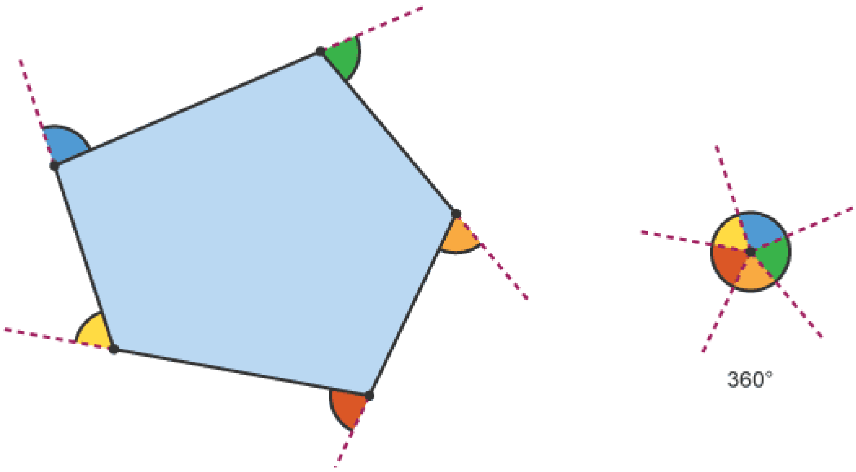


Figura 20

3.3.6. Polígonos inscritos numa circunferência

Um polígono diz-se **inscrito numa circunferência** quando todos os seus vértices estão sobre a circunferência.

É sempre possível inscrever um triângulo numa circunferência, pois o seu circuncentro está a igual distância dos seus vértices.

Considere-se agora um quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de centro O.

Sem perda de generalidade, atendendo à Figura 21 sabe-se que ADC e ABC são ângulos inscritos nos arcos ADC e ABC, respectivamente. Assim, $A\widehat{D}C = \frac{ABC}{2}$ e $A\hat{B}C = \frac{ADC}{2} = \frac{360-ABC}{2}$. Deste modo, $A\widehat{D}C + A\hat{B}C = \frac{ABC}{2} + \frac{360°-ABC}{2}$, de onde vem que $A\widehat{D}C + A\hat{B}C = \frac{ABC+360°-ABC}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$. Estabelece-se, de seguida, o raciocínio análogo para os ângulos DCB e DAB. Generalizando este resultado estabelece-se então que dado um quadrilátero inscrito numa circunferência, a soma das amplitudes dos seus ângulos opostos é 180°.

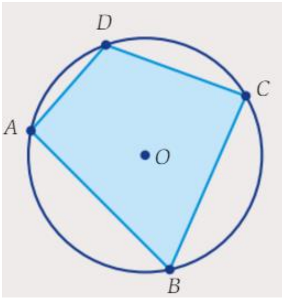


Figura 21

→ Polígonos regulares inscritos numa circunferência

Sabe-se que todo o polígono com os lados geometricamente iguais inscrito numa circunferência é regular bem como todo o polígono regular pode ser inscrito numa circunferência.[9]

Repare-se agora num raciocínio análogo ao esperado na realização da tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular" (Anexo 12):

- Os lados de cada polígono são cordas da circunferência em que se encontram inscritos;

---

[9] Através da disciplina de Educação Visual e Tecnológica os alunos da turma já tinham tido contacto com as duas propriedades e por esse motivo optei por não realizar qualquer demonstração ao encontro das mesmas.

- Como os polígonos são regulares, essas cordas (lados do polígono) são iguais;

Sabendo que, numa circunferência, a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais, pode concluir-se que os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são todos geometricamente iguais. A amplitude de cada um deles é $\frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.

A propriedade anterior é útil quando se pretende construir um polígono regular.

A figura seguinte (Figura 22) representa os passos seguidos na construção de um eneágono (polígono com nove lados), inscrevendo-o numa circunferência de centro O. Estes passos são análogos aos que os alunos seguem na resolução da tarefa "Construir polígonos regulares" (Anexo 13).

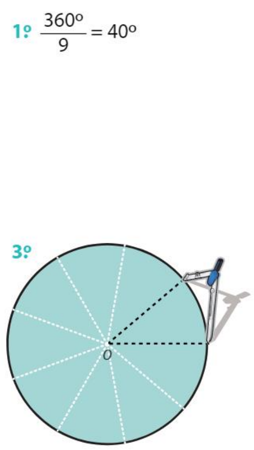


Figura 22

3.4. Metodologia e estratégias de ensino

A Geometria pode ser concebida como uma forma de ver o mundo real com "olhos matemáticos", no entanto ser sensível ao fenómeno geométrico é um problema complexo (Swoboda & Vighi, 2016). Segundo Battista (2001a, citado por Battista, 2008), um dos maiores objetivos do ensino adequado da Geometria é que os alunos desenvolvam uma certa habilidade para usar propositada e significativamente o sistema conceptual geométrico que suporta o raciocínio das formas e do espaço. O mesmo autor defende que para um desenvolvimento mais eficaz do pensamento matemático dos alunos, o ensino construtivista tenta guiar cuidadosamente e ser também suporte às construções pessoais de ideias dos alunos. Assim, a finalidade do ensino construtivista não é, ao contrário do que é apontado no currículo tradicional, que os alunos aprendam meramente listas de propriedades do sistema conceptual, mas sim, capacitá-los para empregarem esse sistema. Para tal, o ensino deve envolver os alunos no desenvolvimento e uso do sistema conceptual em contextos significativos e propositados. Isso encoraja os alunos a construírem significados matemáticos que são mais complexos, abstratos e fortes comparativamente àqueles a que eles correntemente são guiados para construírem significados para os conceitos matemáticos que são importantes na nossa sociedade (Battista, 2008).

Num espírito de questionamento e de resolução de problemas com recurso ao senso comum e à intuição, o ensino construtivista encoraja os alunos a inventarem, testarem e definirem as suas próprias ideias ao invés de seguirem procedimentos ensinados por outros sem os questionarem (Battista, 2008). Inspirada neste conceito de ensino construtivista, contextualizei esta subunidade numa situação da realidade bem conhecida pelos alunos da turma: o futebol. Com recurso a situações concretas que os alunos conseguissem imaginar tais como "um exercício de treino proposto por um treinador" ou "um lançamento da bola para a baliza ao longo de uma determinada trajetória durante um jogo", para além do sentido motivacional que procurava despertar, pretendia que os alunos experimentassem a aplicabilidade da Matemática na interpretação de situações quotidianas e que se apercebessem da existência de uma argumentação puramente matemática que fundamenta e justifica determinados resultados.

Battista (2008) sublinha ainda que este tipo de ensino não se foca somente no questionamento, tendo também por base a perceção e compreensão:

a) das etapas pelas quais cada aluno passa na aquisição de conceitos e procedimentos em tópicos matemáticos particulares,
b) das estratégias que os alunos usam para resolver diferentes problemas em cada uma dessas etapas e
c) dos processos mentais e da natureza do conhecimento subjacentes a essas estratégias.

Assim, ao contrário do que acontece num ensino que se foca única e exclusivamente no questionamento e resolução de problemas, na perspetiva construtivista defende-se que a seleção e sequenciação das tarefas a propor aos alunos devem ser pensadas de acordo com o conhecimento aprofundado que o professor tem acerca do conhecimento matemático dos alunos (Steffe & D’Ambrosio, 1995, citados por Battista 2008), conhecimento esse fundamentado em análises detalhadas das experiências matemáticas dos alunos e dos processos a partir dos quais constroem o seu conhecimento matemático (Cobb, Wood, & Yackel, 1990, citados por Battista 2008). Pareceu-me, então, importante que a subunidade de ensino alvo de análise neste relatório, fosse preparada em função dos alunos da turma e do seu conhecimento matemático mais do que em função do “que é suposto eles saberem fazer”, isto é, ainda que existam orientações curriculares e metodológicas abrangentes a todo o país (às quais dei a merecida atenção), o meu foco seria sempre os alunos, particulares, que tinha diante de mim na sala de aula.

Segundo Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), neste ciclo de ensino, é suposto que os alunos sejam capazes de distinguir uma demonstração formal de uma informal. Os mesmos autores defendem que mesmo sem alcançarem o rigor correspondente e exigido na demonstração matemática, as justificações que os alunos apresentam devem já conter alguns pormenores característicos da demonstração formal. Segundo Pinheiro e Carreira (2013), um processo colaborativo, sustentado pela experimentação e indução, que recorre igualmente à dedução, é uma ferramenta essencial para a elaboração de uma prova torna-se, no raciocínio geométrico que é a ferramenta para o processo de elaboração de prova.

Por este motivo procurei selecionar e/ou construir tarefas que impulsionassem os alunos a recorrerem primordialmente à indução mas também à dedução e à complementaridade entre ambas, tendo em vista o desenvolvimento das capacidades de argumentação e demonstração essencialmente informal, pois pelo que observei em aulas anteriores (ao longo do 1.º período), o estímulo e/ou condução ao raciocínio dedutivo e demonstração formal, não me pareceu adequado à turma em questão, considerando a generalidade dos alunos que a constituem.

A turma na qual desenvolvi a minha prática letiva, pelo conhecimento que dela tinha através da observação e lecionação de aulas, pareceu-me muito participativa em momentos de grande grupo-turma (em qualquer tipo de tarefa já implementada em aula: exercícios, problemas ou de carácter exploratório), por isso pareceu-me pertinente continuar a desenvolver momentos dessa natureza. O mesmo é defendido por Breda et al. (2011, p. 20), em particular quanto ao desenvolvimento do raciocínio geométrico: "promovendo a discussão na turma à volta de exemplos e contraexemplos, os conceitos geométricos vão sendo desenvolvidos e aperfeiçoados". Os momentos de trabalho autónomo ou a pares não são os preferidos dos alunos desta turma durante os quais denoto uma desistência permanente da grande maioria devido, a meu ver, à dependência que têm do professor para a validação de cada passo da resolução.

Neste sentido, as minhas aulas procuraram ir ao encontro do que Baxter e Williams (1996, citados por Mestre & Oliveira, 2012, p. 418) propõem e apresentam como "ensino orientado pelo discurso" cuja realização de tarefas em sala de aula inclui quatro momentos distintos e são eles:

(1) apresentação da tarefa aos alunos;

(2) trabalho autónomo dos alunos em pequenos grupos, durante o qual o professor, ao circular pela sala, assume essencialmente um papel motivador, desafiador, questionador e, se necessário, auxiliador;

(3) apresentação à turma das resoluções realizadas pelos alunos;

(4) sistematização das apresentações e aprendizagens onde o professor assume um papel mais predominante.

Segundo os mesmos autores, o professor deve implementar, identificar e esclarecer frequentemente métodos e/ou regras que conduzam à comunicação dos alunos, tanto em pequenos como em grandes grupos, até que essa seja uma prática intuitiva na sala de aula. Assim, importava também que eu pensasse e planeasse as minhas aulas de modo a que os alunos tivessem o tempo necessário (não excedente) para explicarem o seu modo de pensar aos colegas, ouvirem os outros, criticarem e discutirem os diversos pontos de vista que podem surgir na turma, de modo a desenvolver não só o raciocínio matemático, no geral, mas também o discurso e articulação dos conceitos geométricos, em particular.

A propósito da teoria de van Hiele, Breda et al. (2011, pp. 17 – 18) destacam que o estudo realizado a partir da mesma "proporcionam-nos perspectivas de como analisar e planificar o progresso na aprendizagem da Geometria". Assim, com base na análise do raciocínio geométrico e do progresso que verificar, os níveis de van Hiele constituiriam, para além de uma ferramenta para análise do raciocínio geométrico dos alunos, um elemento que promovesse a minha reflexão frequente da planificação das aulas, podendo levar a alterações na mesma, tendo em atenção o que é referido pelos mesmos autores (p. 18):

> Trata-se de uma teoria onde foram definidos um conjunto de níveis de aprendizagem, mas simultaneamente se afirma que a progressão através dos níveis se faz através do ensino. Isto é, é através das experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos que estes progridem na sua aprendizagem.

3.5. Os recursos e as tarefas

3.5.1. Os recursos

Na aula em que dei inicio à lecionação da subunidade "ângulos e circunferências", optei por motivar o estudo da mesma através de um dos vídeos de "Isto é Matemática"[10]. Devido ao facto de o vídeo disponível *online* conter elementos potencialmente distratores para a aprendizagem (alguns momentos de humor) e também por pretender que fosse lançada apenas a questão motivadora e não a resposta

[10] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=U50VABuJnHI.

à mesma, selecionei os momentos do vídeo que eram de especial interesse tendo em conta o objetivo pretendido.

É de conhecimento geral, e pelo que já referi, que o desenvolvimento do raciocínio geométrico tem que se servir de uma diversidade de representações e de ações adaptadas ao raciocínio a desenvolver. Uma representação diz respeito "à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma" (NCTM, 2007, p.75). Estas representações são um apoio à compreensão dos alunos em relação aos conceitos e relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados (NCTM, 2007) e são úteis para os alunos organizarem o seu raciocínio e tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão.

Assim, os materiais que permitem representar os objetos geométricos devem ser escolhidos em função desses mesmos objetos que se pretende explorar. Por esse motivo procurei, na escolha dos materiais e/ou recursos que utilizaria em aula, ter presente o que é sublinhado por Loureiro (2009, p. 62): "os materiais estão ao serviço das estruturas e não o contrário como tantas vezes acontece, são um meio, não um fim". A mesma autora, refere que da mesma forma se justifica

> a necessidade de realizar actividades de geometria sobre estruturas geométricas diversificadas, com objectos geométricos em representações diversas, estabelecendo ligações entre elas. O desenvolvimento do raciocínio geométrico tem que se servir de uma diversidade de representações e de acções adaptadas ao raciocínio a desenvolver. (…) A geometria dinâmica, bem como *applets* interactivos também têm um papel fundamental que é preciso ligar com a utilização de estruturas geométricas manipuláveis. (p. 62)

Um outro cuidado que vinha a ter com a escolha dos materiais e/ou recursos prende-se com o facto de me consciencializar de que ainda que os recursos como o *Geogebra*[11], o compasso, a régua ou o transferidor, entre outros, possam desempenhar

[11] A turma em questão já tivera contacto com o *software* no ano anterior, no estudo das funções afim.

um papel muito importante na aprendizagem realizada, eles, por si só, não conduzem a essa mesma aprendizagem (Breda et al., 2011, p. 20). Deste modo, não bastaria, por exemplo, disponibilizar aos alunos uma sala de informática, uma série de computadores e um guião que os auxilie na construção no *Geogebra* de determinado objeto ou realização de uma tarefa em concreto, importava-me também organizar e/ou proporcionar um ambiente de aprendizagem favorável (Breda et al., 2011, p. 20) para que, através da utilização de determinadas ferramentas, eles pudessem retirar instrumentos que potenciem significativamente a estruturação geométrica.

Em suma, tanto os recursos como os materiais utilizados foram sempre, ao longo da minha intervenção letiva, um meio para chegar a um fim. Tanto através do *Geogebra* como da construção com lápis e compasso, a minha finalidade estava em proporcionar aos alunos um contexto que lhes permitisse viver a experiência de fazer conjeturas, explorar ideias, comunicar os seus raciocínios, validar as suas conclusões, questionar e discutir o seu próprio raciocínio e o dos outros e comunicar as suas descobertas matemáticas.

3.5.2. As tarefas

A importância de me debruçar sobre as tarefas a propor aos alunos advém do facto de serem elas as promotoras da aprendizagem a realizar, aprendizagem essa que é feita tanto através da atividade que essas tarefas exigem aos alunos como da sua posterior reflexão (Ponte, 2005). O mesmo autor refere que é fundamental estruturar criteriosamente as tarefas a realizar em sala de aula, de modo a encorajar os alunos a trabalhar (autonomamente, a pares ou em grande grupo) a Geometria, utilizando os materiais como ferramenta, cujas potencialidades permitem explorar, conjeturar, refletir sobre os conceitos, propriedades e relações geométricas a serem "desenvolvidos e aperfeiçoados".

Situando esta subunidade na unidade abrangente que é a Geometria, julgo ser importante ressalvar que, segundo Loureiro (2009, p. 63), as tarefas em aula não devem focar-se somente nos "objetos geométricos, devendo atender muito mais às ações que podem ser aplicadas sobre eles". As ações a que a autora se refere passam pela classificação, composição, decomposição, construção e transformação "que devem ter um destaque especial ao longo de toda a aprendizagem" de modo a que as deixem de aprender "nomes de figuras e (…) distingui-las apenas pelo seu aspeto ou posição" (p. 63).

Segundo Ponte (2005), "uma tarefa, pode ser caracterizada a partir de quatro dimensões básicas: (i) o seu grau de dificuldade; (ii) a sua estrutura; (iii) o seu contexto referencial; e (iv) o tempo requerido para a sua resolução" (p. 4).

Devido às características da turma que já referi e também tendo em conta a natureza da unidade a lecionar e as competências matemáticas que procurava promover nos alunos, as tarefas que desenvolvi em aula variaram entre exercícios, problemas e simples explorações que, segundo Ponte (2005, p. 5), "são fáceis e de estrutura aberta". A propósito da distinção dos diferentes tipos de tarefas, Ponte (2005, p. 4) esclarece que "as características de uma tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza. Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício". Relativamente às outras duas dimensões que distinguem os tipos de tarefa, o contexto referencial e o tempo requerido, variei entre tarefas contextualizadas numa situação real e as "*puramente matemáticas"* [itálico do autor], de curta a média duração não ultrapassando o limite de dois tempos letivos cada.

Assim, as tarefas que selecionei e/ou construí foram pensadas, essencialmente, de acordo com: (1) os objetivos definidos para cada uma das aulas e (2) o contexto da turma à qual as propunha. Diretamente relacionada com este último fator, destaco a importância e influência que a reflexão sobre cada uma das aulas teve nas alterações a efetuar não só nos planos das aulas seguintes como nas tarefas a realizar nas mesmas.

Na realidade, segundo Christiansen e Walther (1986, citados por Ponte, 2016), "o que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre essa atividade" (p. 9). Assim, para além de proporcionarem uma atividade matemática bastante considerável, as tarefas que propus e o modo como as implementei em aula, incluíram uma oportunidade de reflexão do trabalho realizado.

As tarefas realizadas durante esta subunidade são apresentadas de seguida em grupos consoante os objetivos, finalidades ou metodologias das mesmas. A ficha diagnóstico, por se revestir de um propósito muito específico não é agrupada com nenhuma outra (Anexo 5).

As tarefas 2, 3 e 4 e a geometria dinâmica

Quadro 7: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 2, 3 e 4.

<table>
<tr><th rowspan="2">Tarefa</th><th rowspan="2">Tópicos</th><th colspan="2">Objetivos de:</th></tr>
<tr><th>Aprendizagem</th><th>Ensino</th></tr>
<tr><td>2: “Arcos e cordas”
(Anexo 6)</td><td>· Elementos da circunferência;</td><td>· Criar familiaridade com a construção geométrica no Geogebra;
· Construir no software alguns elementos da circunferência e reconhecer as definições associadas aos mesmos;</td><td rowspan="3">· Desafiar os alunos a retirarem/formularem conclusões e/ou conjeturas a partir da manipulação geométrica;
· Criar um contexto de discussão entre alunos/professor;
· Promover o desenvolvimento da comunicação matemática.</td></tr>
<tr><td>3: “Investigando a circunferência”
(Anexo 8)</td><td>· Propriedades de circunferências;</td><td>· Estabelecer relações entre arcos e coradas de uma circunferência;</td></tr>
<tr><td>4: “Ângulos excêntricos”
(Anexo 9)</td><td>· Ângulos excêntricos;</td><td>· Relacionar a amplitude de um ângulo excêntrico com a amplitude dos arcos associados.</td></tr>
</table>

Já foi anteriormente mencionada a oportunidade que a tecnologia dá aos alunos de visualizarem objetos geométricos segundo diferentes perspetivas. O *Geogebra*, enquanto programa de Geometria dinâmica, permite que aos alunos investiguem as propriedades das figuras, estabeleçam relações, formulem e testem conjeturas (Breda et al., p. 21) com base numa experimentação que vai além das particularidades de determinado objeto, numa determinada posição.

Inicialmente, ainda antes de iniciar a minha intervenção letiva, tinha planeado a realização de cinco a seis aulas com recurso ao *Geogebra* em pequenos grupos de dois ou três alunos, na sala de informática. No entanto, após a realização da primeira dessas aulas (onde os alunos realizaram a tarefa 2) e reflexão conjunta em turma acerca do funcionamento da mesma, vi-me obrigada a fazer alterações nos moldes de gestão das mesmas, isto porque os constantes problemas em alguns dos computadores da sala de aula (tanto os computadores fixos como as unidades portáteis que requisitei na biblioteca) tiveram consequências que foram para além do atraso no ritmo de aula e consequente não cumprimento do plano. Estes imprevistos tiveram repercussões percetíveis, tanto no que diz respeito à motivação dos alunos para prosseguirem os trabalhos (um grupo chegou a mostrar-se frustrado por ter "perdido" o trabalho realizado por duas vezes) como à concentração dos alunos (durante o tempo em que procurava solucionar o imprevisto, reiniciando o computador ou alterando a planta de sala de aula, os alunos acabavam por se dispersar e perder o foco na tarefa). Foi também notória a atenção que abdiquei de dar a determinados grupos por estar a resolver problemas técnicos em algum dos computadores. Para além dos aspetos mencionados, a nível logístico, também o tempo de que dispunha para a organização atempada da sala bem como a requisição e transporte dos computadores portáteis, não me permitia realizar aulas deste tipo com a duração de apenas um tempo letivo (45 minutos).

Colocando de parte a hipótese de prosseguir com a realização de aulas semelhantes à realizada no dia 2 de março, continuava consciente das diferentes características e potencialidades reconhecidas no *Geogebra* que seriam tão importantes na aprendizagem dos alunos como sejam a facilidade de utilização e o rigor das construções, a promoção da intuição, da exploração, da justificação, da descoberta e da demonstração, acrescentando a criatividade e a intuição (Brunheira & Ponte, 2016, p. 350-351). Assim, optei por implementar nesta turma algumas aulas que, a meu ver, embora não abarcassem o benefício de o aluno experimentar pelas "próprias mãos" toda a manipulação geométrica, permitiam um ambiente em sala de aula propício à aprendizagem para além de que continuava a disponibilizar aos alunos muitas das potencialidades do *software* utilizado. Nessas aulas, realizadas na sala de informática ou na sala de aula habitual, projetava do meu computador pessoal para toda a turma um ficheiro *Geogebra* no qual, consoante as intervenções dos alunos, iam sendo feitas por mim as construções pretendidas ou necessárias à realização de determinada tarefa.

As tarefas utilizadas nestas aulas emergiram do manual escolar adotado, através de algumas alterações previamente pensadas e anunciadas à turma antes do início da tarefa a realizar posteriormente. A minha preocupação em utilizar tarefas do próprio manual vai para além do que é mencionado pelo Decreto-Lei n.º 369/90 de 26 de Novembro, artigo 2.º, que apresenta este recurso como um documento dirigido aos alunos e que se compromete a contribuir para o desenvolvimento de capacidades e para a aquisição dos conhecimentos propostos nos programas em vigor. Na realidade, aquilo que procuro é que os alunos reconheçam no manual um instrumento de trabalho e que se apropriem dele como um auxiliar de estudo.

Em situação de sala de aula, para que o facto de ser eu a manusear o *software* Geogebra não retirasse a possibilidade de atividade aos alunos, procurei que a construção fosse sendo feita consoante o que era sugerido pela turma de modo a que os alunos não se focassem apenas nos objetos geométricos, mas sobretudo nas ações que se podem fazer sobre eles (Loureiro, 2009).Os momentos de construção no *software* foram intercalados com momentos de discussão em pequenos grupos e de posterior sistematização em grupo-turma, em pequenos e grandes grupos.

As tarefas 5 e 8 e a aplicação e consolidação de conhecimentos

Quadro 8: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 5 e 8.

<table>
<tr><th rowspan="2">Tarefa</th><th rowspan="2">Tópicos</th><th colspan="2">Objetivos de:</th></tr>
<tr><th>Aprendizagem</th><th>Ensino</th></tr>
<tr><td>5: “Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos” (Anexo 10)</td><td>· Ângulos de segmento;
· Ângulos ex-inscritos;</td><td>· Reconhecer e distinguir cada tipo de ângulos;
· Calcular a amplitude de cada um desses ângulos;</td><td rowspan="2">· Confrontar os alunos com exercícios ou problemas desafiantes, com um grau de dificuldade ajustado;
· Dar a conhecer aos alunos situações em que possam aplicar os conhecimentos já adquiridos e/ou consolidar aprendizagens;
· Auxiliar os alunos a reconhecerem os conhecimentos a aplicar na resolução de determinado problema/exercício;
· Criar um contexto de discussão entre alunos/professor;
· Promover o desenvolvimento da comunicação matemática.</td></tr>
<tr><td>8: “Construir polígonos regulares” (Anexo 13)</td><td>· Polígonos regulares;</td><td>· Saber construir, com transferidor e compasso, um polígono regular com lados inscritos numa circunferência, sendo conhecido um dos seus vértices e o centro da circunferência.</td></tr>
</table>

Tal como referido anteriormente, qualquer que seja a tarefa pensada ou construída, deverá ir sempre ao encontro das características e interesses da turma

(Ponte, 2005) e, atrevo-me a acrescentar, que não menos importantes são as necessidades dos alunos para os quais essas tarefas são dirigidas. A turma, em questão, demonstra níveis muito baixos de trabalho autónomo, dentro e, de forma particular, fora da sala de aula, na maioria das disciplinas, e por esse motivo a realização de exercícios, com um grau de dificuldade a variar entre o reduzido e médio, me pareceu tão importante durante a minha intervenção letiva.

A realização de exercícios de aplicação de conhecimentos foi essencial na medida em que permitiu aos alunos perceberem qual o resultado que deveriam reter de determinada tarefa realizada tanto com recurso ao *Geogebra* como não. Por exemplo, durante a realização da tarefa 4, "Ângulos excêntricos", foi pedido aos alunos que indicassem a amplitude de alguns ângulos inscritos para que depois fizessem a comparação entre esses e outros valores. Posteriormente, na resolução do primeiro exercício de aplicação do manual, os alunos efetuaram os passos seguidos na tarefa anterior, não reconhecendo que dela deveriam utilizar diretamente a conclusão final a que se chegou no que diz respeito ao cálculo da amplitude de um ângulo excêntrico.

Ao selecionar os exercícios (do manual ou a integrar nas tarefas) a realizar em sala de aula, tive em consideração o grau de dificuldade dos mesmos de modo a que não fossem tão difíceis ao ponto de levar o aluno a desistir de o resolver (Ponte, 2005) nem que, de tão fáceis, retirassem valor à sua atividade. Aliás, como refere José Sebastião e Silva (1964, citado por Ponte, 2005, p. 5), "mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios cuidadosamente escolhidos, que testem a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos".

Tendo presente que, para a maioria dos alunos, fazer uma lista de exercícios propostos não é uma atividade muito interessante (Ponte, 2005), o meu papel durante esses momentos foi essencialmente motivador. Para além disso, sabendo que para os alunos é mais estimulante e/ou motivador resolver exercícios em díade e preferencialmente em grande grupo, também procurei dar espaço e tempo a momentos dessa natureza.

Outro aspeto que tive em consideração é também referido por Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 356): "a compreensão dos procedimentos passa não só pela sua aplicação, mas também por perceber a razão por que funcionam, como podem ser utilizados e como podem ser interpretados os seus resultados". Assim, anteriormente à aplicação de conhecimentos sublinhei o "porquê de funcionarem", durante a consolidação clarifiquei o "como utilizar o que já sabemos" e posteriormente levei os alunos a criticarem e discutirem os resultados obtidos.

As tarefas 6 e 7, a conjetura e a generalização

Quadro 9: Tópicos e objetivos referentes às tarefas 6 e 7.

<table>
<tr><th rowspan="2">Tarefa</th><th rowspan="2">Tópicos</th><th colspan="2">Objetivos de:</th></tr>
<tr><th>Aprendizagem</th><th>Ensino</th></tr>
<tr><td>6: "Ângulos internos de um polígono" (Anexo 11)</td><td>· Ângulos internos de um polígono;</td><td>· Provar que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $(n-2)\times 180°$;
· Reconhecer que, num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$;</td><td rowspan="2">· Impulsionar o uso de raciocínio indutivo;
· Criar um contexto de discussão entre alunos/professor;
· Promover o desenvolvimento da comunicação matemática.</td></tr>
<tr><td>7: "Ângulos ao centro num polígono regular" (Anexo 12)</td><td>· Polígonos regulares;</td><td>· Provar que os ângulos ao centro de um polígono regular são geometricamente iguais;
· Reconhecer que a amplitude de cada ângulo ao centro de um polígono regular é $\frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.</td></tr>
</table>

Ao construir tarefas como a sexta e a sétima realizadas na minha intervenção, tinha em vista proporcionar aos alunos momentos de descoberta e generalização através de problemas simples, onde eles se sentissem desafiados e, em simultâneo, experimentassem construir novo conhecimento, chegando a resultados valorizados e corretos do ponto de vista científico. Neste nível de ensino, espera-se que os alunos estejam familiarizados com processos de raciocínio, como a formulação de uma conjetura, o teste desta conjetura e a apresentação do raciocínio utilizado (NCTM, 2007).

Neste tipo de tarefas, dei prioridade à mobilização, por parte dos alunos, do seu raciocínio indutivo que, segundo Pólya (1954, citado por Ponte, Mata-Pereira &

Henriques, 2012), começa pela observação, que por sua vez leva ao levantamento e elaboração de conjeturas as quais podem e devem, por fim, ser testadas e verificadas. Os mesmos autores, defendem que o raciocínio indutivo ocorre, essencialmente, "na formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos" (p. 359), que esteve presente na realização tanto da tarefa 6 (onde os alunos, a partir dos seus resultados e dos dos seus pares às duas primeiras questões, fizeram o preenchimento autónomo da tabela, inclusive, para um polígono com n lados) como na tarefa 7 (na qual os alunos partiram do resultado obtido na questão anterior). Estas evidências ganham sentido quando Oliveira (2002, citado por Ponte, Mata-Pereira & Henriques ,2012), sublinha a estreita relação entre analogia e indução salientando que "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos".

Na realização das tarefas 6 e 7, talvez de forma ainda mais vincada do que nas restantes, valorizei e dei espaço à discussão tanto em pequenos como em grande grupo e de igual modo à comunicação matemática entre professora e turma/alunos.

3.6. A avaliação das aprendizagens

No que respeita à avaliação, recorri a três tipos de avaliação:

i. Diagnóstica
    a. Ficha diagnóstica (a realizar na primeira aula: dois de março);
ii. Reguladora
    a. Questionamento oral durante as aulas;
    b. *Feedback* escrito frequente aos alunos;
    c. Autoavaliação participada;
iii. Sumativa
    a. Teste sumativo;
    b. Portefólio.

A avaliação diagnóstica surgiu neste contexto apenas para analisar os conhecimentos que os alunos possuíam sobre os conteúdos a serem abordados nesta subunidade. Assim como para Pacheco (1994), a avaliação diagnóstica

> corresponde quer ao momento de avaliação inicial (início do ano letivo, trimestre, unidades letivas…) quer ao momento de avaliação pontual, consistindo no levantamento de conhecimentos dos alunos considerados pré- requisitos, para abordar determinados conteúdos (…) Pela sua natureza, os dados assim recolhidos não devem nunca contar para a progressão do alunos, mas apenas servir de indicador para o professor. (p.75)

No que diz respeito à avaliação reguladora, para o NCTM (1999), receber *feedback* ao longo do tempo é um "direito" (p. 4) que os alunos têm e que deve ser dado "em múltiplas ocasiões e em diferentes tipos de tarefas que incidam sobre conteúdos matemáticos importantes" (p. 39). Também Menino (2004) considera no seu estudo que o *feedback* é essencial para as aprendizagens dos alunos pois "guiam [os alunos] no sentido de superar erros e conseguir aprendizagens mais significativas" (p. 221). Relativamente à *autoavaliação*, Santos (2002, p. 2) considera-o como "o processo por excelência da regulação, dado ser um processo interno ao próprio sujeito". Citando Nunziati (1990), a mesma autora aponta algumas razões que destacam a importância deste processo de regulação das aprendizagens, quando comparado com a regulação externa levada a cabo pelo professor e das mesmas sublinho a seguinte: "a ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes" (p. 2). A colocação de *questões pertinentes*, um outro método de avaliação reguladora, é referida pelo NCTM (2017): "Um ensino eficaz da Matemática utiliza questões pertinentes para avaliar e incrementar o raciocínio e a criação de sentido, por parte dos alunos, acerca das ideias e relações matemáticas" (p. 36). O questionamento que aqui é referido apoia-se em questões que sejam um motor na explicitação e reflexão por parte dos alunos do seu próprio pensamento, sendo que é ao explicar e refletir que o aluno desenvolve e estrutura um discurso matemático significativo. Ainda assim, importa salientar que as questões por si só, não garantem que os alunos deem sentido à Matemática nem desenvolvam o seu raciocínio, devendo ter-se em consideração dois fatores: o tipo de questão colocada e o modelo de questionamento utilizado (NCTM, 2017). Quanto ao tipo de questões, elas são distinguidas pelo propósito com que surgem: recolher informação, explorar o pensamento, tornar a matemática visível ou encorajar a reflexão e a justificação. Sublinhando, antes de mais, que embora o tipo de questões possa variar consoante o nível de raciocínio do aluno a que se coloca a questão, na interação e comunicação entre o professor e o aluno, todos os tipos de questões devem, de alguma forma, estar presentes, visto que cada uma assume um papel e/ou função muito próprios. Isto é, enquanto as questões de recolha de informação servem o propósito de reconhecer o que os alunos sabem, as questões que encorajam a reflexão e a justificação mostram-se úteis na explicitação do raciocínio que o aluno desenvolve (NCTM, 2017).

3.7. Descrição da intervenção letiva

3.7.1. 1.ª aula: 2 de março de 2017

A primeira aula foi planeada no sentido de alcançar objetivos de duas naturezas distintas. A nível de conteúdos didáticos, pretendia que os alunos soubessem identificar, designar e utilizar corretamente os termos "ângulo ao centro", "arco de circunferência", "arco menor", "arco maior", "corda", "arco subtenso pela corda", "extremos de um arco" e "arco correspondente à corda". Em simultâneo, procurava que, através e com auxílio de um guião, os alunos se familiarizassem com as ferramentas que o Geogebra disponibiliza para o estudo da Geometria e que construíssem, com o acompanhamento da professora, os elementos da circunferência em estudo nesta aula.

No presente ano letivo os alunos ainda não tinham realizado qualquer aula na sala de informática, assim, o momento inicial da aula destinou-se à distribuição dos alunos pela sala, em grupos de dois ou três por computador. Devido às faltas de atraso e de presença não antecipadas, tive de fazer alguns ajustes à planta que tinha pensado, facto esse que levou a que se despendesse mais tempo de aula neste momento do que o previsto.

Sendo esta a aula que inicia a subunidade "Ângulos e circunferência", optei por motivar o estudo da mesma através de um dos vídeos de "Isto é Matemática" (disponível em https://www.youtube.com/watch?v=U50VABuJnHI). Durante a projeção do vídeo, e tal como planeado, fiz algumas pausas para que os alunos tivessem tempo de assimilar o que é explicitado até então, certificando-me de que estavam a acompanhar a apresentação. A reação ao vídeo foi claramente positiva e os alunos foram capazes de explicitar a questão que estava a ser lançada através do mesmo.

Ainda antes da realização da tarefa em pequenos grupos fiz, para toda a turma, uma breve apresentação de algumas ferramentas e do modo de trabalhar com o programa no âmbito da Geometria (a turma já tinha trabalhado com o Geogebra no estudo das funções, no ano anterior), sendo que ficaram em falta a referência e explicação dos tipos de rótulos existentes (nome, valor, nome e valor) e o facto de qualquer ângulo ser sempre construído e interpretado no sentido anti-horário. Iniciou-se, após isso, a concretização da tarefa em pequenos grupos. Durante esse tempo, apercebi-me de que os alunos não estavam a efetuar o completamento de espaços nas definições dos elementos da circunferência ainda que toda a construção estivesse a ser "fácil" para a grande maioria da turma. Assim, e visto que os alunos estavam a fazer a construção no Geogebra de forma mais rápida e autónoma do que o esperado, foi-me possível e pareceu-me pertinente insistir com os pequenos grupos para o preenchimento dos espaços para completamento das definições. No entanto, e mesmo com muito apoio e ajuda da minha parte, os alunos continuaram a manifestar grandes dificuldades em completar as designações. Facto que me leva a concluir que o modo como a tarefa estava organizada não permitiu alcançar os objetivos pretendidos, pois a concretização da mesma não desempenhou o seu papel formativo a nível da aprendizagem das definições associadas aos elementos da circunferência em estudo. Por outro lado, refleti acerca da importância de ter estabelecido como um dos objetivos para aula "o aluno saber designar os elementos na circunferência" visto que tendo em atenção as características da turma, talvez seja demasiado ambicioso procurar que os alunos saibam designar/definir os elementos, sendo mais importante que saibam identificar visualmente esses elementos e posteriormente saber utilizar corretamente a nomenclatura na estruturação de respostas que o exijam.

Durante a realização da tarefa fui obrigada a fazer duas alterações na planta da sala de aula devido a avarias em dois dos computadores cedidos pela escola, facto esse que me desmotivou relativamente à concretização de todas as aulas posteriores que tinha planeado com recurso ao *Geogebra* na sala em questão, tal como referi em “As tarefas 2, 3 e 4 e a manipulação geométrica” (no subcapítulo “As tarefas”, página 50).

Finda a realização da tarefa, entrego a cada aluno as figuras que deverão legendar e em simultâneo projeto no quadro essa mesma figura a cores para que não existam dúvidas relativamente à estrutura da legenda (para onde aponta determinada seta). Ao contrário do que era esperado, os alunos manifestaram muitas dúvidas na legenda da figura, que me pareceu ser uma consequência direta das dificuldades no completamento das designações.

Após a legenda individual/em pequeno grupo da legenda, os alunos começaram a dispersar e o ruído na sala começava a aumentar. Por esse motivo e para que os alunos conseguissem retirar desta aula mais do que a simples construção geométrica no *software*, optei por realizar a correção da legenda da figura. O que gerou também alguma confusão na turma devido à pluralidade de conceitos atribuídos ao mesmo elemento (“arco correspondente” ou “arco subtenso”, “arco menor” ou simplesmente “arco”).

Posteriormente, fiz um levantamento verbal das maiores dificuldades sentidas pelos alunos, momento em que os alunos manifestaram algum contentamento com a facilidade com que os próprios fizeram a construção no Geogebra, tanto que deixaram de se guiar pelo documento auxiliar, mas que por outro lado, foi muitas vezes difícil prosseguir trabalho com as constantes paragens do sistema. Tal como percecionei, os alunos verbalizaram a dificuldade que tiveram no preenchimento de espaços da tarefa.

3.7.2. 2.ª aula: 6 de março de 2017

A aula foi planificada no sentido de alcançar os seguintes objetivos: a) saber identificar e utilizar corretamente os termos “ângulo ao centro”, “extremos de um arco”, “arco maior”, “arco menor”, “corda” e “arco correspondente”; b) reconhecer que, numa circunferência, cordas e arcos determinados por ângulos ao centro iguais são iguais e vice-versa; c) identificar a medida da amplitude de um ângulo ao centro como a amplitude do arco compreendido entre os seus lados e d) saber representar simbolicamente a amplitude de um ângulo (^) e de um arco (⌒).

Tendo em conta a aula anterior, na qual, ainda após a correção da legenda os alunos revelaram dificuldade na aprendizagem das noções em causa, optei por voltar a distribuir pelos alunos a figura a legendar a cores e após a distribuição iniciei de imediato a legenda em grande grupo. Sendo que o meu objetivo seria apenas que os alunos soubessem identificar os elementos da circunferência em causa, não chamei a atenção para as definições dos mesmos e optei por não dar ênfase à noção de "arco subtenso" visto não ser de grande interesse para as aprendizagens futuras dos alunos. Fui chamada à atenção, pela professora orientadora, que não fiz referência ao facto de o ângulo ao centro se caracterizar pelo facto de o seu vértice coincidir com o centro da circunferência, aspeto importante tendo em conta que se segue o estudo de vários tipos de ângulos com características distintas.

Integrada na temática do campo de futebol (abrangida pelo vídeo apresentado na aula anterior), enuncio uma situação que acompanhe a aprendizagem da propriedade "numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais, correspondem arcos e cordas geometricamente iguais". Situação essa que se planeava ser explorada através do Geogebra, mas tal não foi totalmente possível de concretizar por incompatibilidade da projeção do ecrã do *software*. Assim, não consegui mostrar o movimento de rotação dos alunos no Geogebra, auxiliando-os apenas a criarem uma imagem mental dessa mesma transformação e das consequências que dela advêm. Na posterior demonstração, passo a passo, da propriedade já referida, relembrei a questão 4 da ficha diagnóstico, sublinhando o facto de a rotação preservar as distâncias e o significado e implicações que essa característica acarretava para a situação que estava a ser estudada.

Posteriormente, fiz uma breve abordagem às propriedades recíprocas desta primeira analisada e, por perceber que os alunos estavam a ter algumas dificuldades na compreensão destas propriedades, optei por fazer um breve exercício de resposta fácil e direta em que os alunos aplicaram com bastante facilidade uma das propriedades referidas.

Tal como planeado, o momento seguinte destinou-se à aplicação de conhecimentos com o exercício 2 da página 82 do manual. Ao indicar o início do momento de trabalho individual, relembro os alunos da necessidade de justificarem devidamente e matematicamente as respostas, fazendo uso do que estudámos até então. Os dois tipos de raciocínio distintos que foram tidos em conta no meu plano de aula, foram ambos seguidos por diferentes alunos da turma, ao contrário do que era esperado. No entanto, os alunos manifestaram bastante dificuldade em estruturar a sua resposta, tanto na escrita como na verbalização da mesma, e em justificar determinadas afirmações. Os alunos recorreram a passos da demonstração da propriedade estudada anteriormente ao invés de aplicarem diretamente a propriedade, como se pretendia. O que me leva a concluir que os alunos não retiveram a conclusão principal, isto é, a propriedade "numa circunferência, cordas e arcos determinados por ângulos ao centro iguais são iguais e vice-versa".

A construção de respostas completas e estruturadas é uma grande dificuldade desta turma, daí que tenha sido necessário, escrever uma resposta completa no quadro que os alunos viessem a transcrever para o caderno. Optei por ser eu a escrever a resposta, não sem antes alertar a turma que seriam os alunos, em grande grupo, a estruturarem a resposta, sendo eu apenas um elemento orientador na escrita da mesma. Neste momento, incentivei bastante a turma, exigindo que aplicassem os conceitos apropriados, que fizessem referência a uma das propriedades estudadas anteriormente e que utilizassem, sempre que necessário, as letras apresentadas na figura para um melhor esclarecimento do raciocínio que estavam a seguir.

A relação entre a medida da amplitude de um ângulo ao centro com a amplitude do arco compreendido entre os seus lados foi projetada, e posteriormente, questionei os alunos sobre o significada afirmação que ali estava apresentada, no sentido de compreender se intuitivamente a turma conseguia perceber a propriedade em causa e se existiam dúvidas relativamente a algum conceito ou expressão. Tal interrogação despertou a atenção da turma pois, de imediato, reconheceram os conceitos subjacentes, no entanto foi necessário que eu fizesse um esboço para retirarem a relação explícita no enunciado. Pelo facto de os alunos terem manifestado dificuldades a nível da simbologia na ficha diagnóstico (questão 2) e noutras situações de aula anterior, explicitei e distingui os símbolos associados à amplitude de um ângulo e à de um arco.

A fim de me certificar que os alunos aprenderam a relação anterior, projetei um exercício de aplicação imediata da mesma, inserido numa situação de um jogo de futebol. A turma respondeu, de imediato e quase em sintonia, corretamente, tendo os alunos mostrado contentamento na facilidade com eles próprios responderam. Neste momento, não exigi qualquer formalidade da estruturação da resposta pois não era esse o objetivo pretendido com este exercício.

De seguida, propus à turma que realizassem autonomamente e a pares o exercício 3 da página 82 do manual, sublinhando a importância de escreverem respostas completas e bem estruturadas e que, posteriormente, se voluntariassem para as escreverem e explicarem para os colegas. Os alunos chegaram aos resultados corretos e estabeleceram os raciocínios esperados, no entanto, e por ser a primeira aula desta subunidade em que eles constroem autonomamente as suas respostas, estas continham algumas incoerências a nível linguístico e/ou científico. Assim, a correção das mesmas demorou mais tempo do que o esperado, daí que não tenha havido tempo para a resolução da terceira alínea, a qual foi dirigida para trabalho de casa.

3.7.3. 3.ª aula: 7 de março de 2017

Com esta aula tinha em vista que os alunos conseguissem estabelecer relações entre arcos e cordas de uma circunferência e dar especial atenção à forma como estes comunicam em Matemática, na verbalização de ideias durante uma tarefa de exploração. Assim, tendo em vista este mesmo objetivo e observação, desenvolvi a tarefa "Investigando a circunferência".

A aula iniciou com a correção da alínea que tinha sido dirigida para trabalho de casa na aula anterior. Pelo facto de, nessa mesma aula, na última alínea resolvida ter sido apresentada uma resposta muito longa e confusa que, mesmo após a minha correção, continuava demasiado extensa, optei por levar para esta aula uma resposta já escrita num diapositivo de PowerPoint e apresentei a mesma, para que os alunos percebessem que uma resposta completa não é obrigatoriamente, e para já, uma resposta muito longa. De igual forma, chamei a atenção para toda a notação e simbologia utilizada.

A metodologia utilizada nesta aula foi diferente de qualquer uma até então, de modo que dediquei uns breves minutos à explicação dos moldes em que a realização da tarefa ia ser feita, destacando que o que se pretendia era que os se centrassem na discussão das conclusões que poderiam vir a retirar de algumas construções feitas no *software* e, assim sendo, a construção ia ser feita por mim consoante as suas intervenções e sugestões e projetada para toda a turma em simultâneo.

Os alunos desenvolveram um trabalho muito significativo ao longo da realização da tarefa, tanto nas intervenções no momento de construção no *Geogebra,* como na posterior discussão a pares ou em grupos de três e na apresentação e discussão em turma das conclusões que retiraram em pequenos grupos.

No momento final da tarefa, a síntese, os alunos manifestaram alguma dificuldade em formalizar as conclusões a que chegaram anteriormente tanto que não conseguiram compreender a construção formal das propriedades a que eu pretendia que chegassem. Decorrente da dificuldade manifestada neste momento, não foi possível realizar o exercício de consolidação apontado no plano desta mesma aula, o qual foi dirigido para trabalho de casa. Esperando que os alunos sentissem dificuldade em realizar esse trabalho de casa, optei por recapitular uma característica do trapézio que é o ponto de partida para a resolução deste exercício.

3.7.4. 4.ª aula: 9 de março de 2017

Para esta aula, estabeleci os seguintes objetivos: a) reconhecer, dada uma circunferência, um setor circular como a interseção de um ângulo ao centro com o círculo e b) saber que, dada uma circunferência ou em circunferências iguais, o comprimento de um arco de circunferência e a área de um setor circular são diretamente proporcionais à amplitude do respetivo ângulo ao centro.

O momento inicial da aula, no qual os alunos transcrevem o sumário que está escrito no quadro e a professora verifica as presenças dos alunos e recolhe a informação de quem fez ou não o trabalho de casa, foi especialmente demorado (aspeto mencionado pela professora orientadora).

Aquando da correção do trabalho de casa, os alunos revelaram muitas dificuldades não esperadas visto que a propriedade a aplicar nesta situação parecia apreendida na aula anterior. Para os alunos, o que se pretende demonstrar é uma evidência visual, logo não conseguem desenvolver uma explicação para algo que lhes parece visível. Para além disso, mesmo após reconhecerem qual a propriedade a aplicar, os alunos chegaram a conclusões erróneas. Assim e por estes motivos, também este momento da aula se prolongou mais do que o planeado.

Uma vez corrigido o trabalho de casa, iniciou-se o terceiro momento da aula que se ocupou do estudo da medida do comprimento de um arco e da área de um setor circular. Optei novamente por apresentar uma questão integrada no contexto do campo de futebol. E progredindo em pequenos passos, procurei que os alunos chegassem à relação de proporcionalidade direta entre o comprimento de um arco de circunferência e o ângulo ao centro que lhe corresponde. A maioria dos alunos manifestou bastantes dificuldades desde o primeiro passo no qual se pretendia calcular o comprimento de um arco correspondente a um ângulo ao centro com 1° de amplitude, estabelecendo a relação com o perímetro da circunferência e com o ângulo giro, no centro da circunferência. A restante minoria conseguiu chegar à generalização formal sem grandes obstáculos. Reconheço que neste momento houve demasiada exposição da minha parte e que, ainda que tentasse que os alunos tivessem um papel bastante ativo na discussão e formulação da generalização, centrei a aula no meu papel e desempenho o que pode ter constituído um fator de desmotivação e desconcentração para grande parte da turma. Assim, teria sido vantajoso incluir neste momento de construção do conhecimento teórico alguns exercícios de aplicação de conhecimentos tanto para os alunos acompanharem melhor cada um dos passos como para motivar e captar a atenção da turma.

Ao contrário do que era esperado, após a apresentação da fórmula que permite determinar a medida de comprimento de um arco de circunferência ou a da área de um setor circular através de uma relação de proporção com o ângulo ao centro que lhe corresponde, os alunos optaram por não fazer muito uso da mesma, fazendo os cálculos de acordo com o primeiro processo que foi apresentado e discutido. Aquando da posterior reflexão conjunta sobre a aula com as três professoras orientadoras, são apontadas as muitas dificuldades algébricas dos alunos (nomeadamente em efetuar a multiplicação cruzada perante uma proporção $\frac{x}{y}=\frac{w}{z}$) como o fator que justifica essa opção por parte da maioria da turma.

Optei por escrever, num dos quadros da sala, as fórmulas a que íamos chegando para a determinação das medidas do comprimento de um arco e da área de um setor circular. Reconheço que foi uma boa medida para estimular o trabalho autónomo dos alunos no momento seguinte pois embora eu tivesse exigido que transcrevessem as fórmulas necessárias à medida que foram discutidas em aula, a maioria dos alunos parecia "perdida" sem saber que fórmula aplicar perante determinada situação.

Antes de os alunos iniciarem a resolução autónoma e em pequenos grupos do exercício proposto por mim, esclareci a organização mais vantajosa para a resposta a cada uma das alíneas e, ao contrário do que estabeleci no plano de aula, não exigi que as duas primeiras alíneas fossem resolvidas por dois processos distintos pois, no momento, isso poderia aumentar ainda mais a dificuldade do exercício.

Durante o momento de trabalho autónomo, ainda que com muitas dificuldades e dependentes da ajuda/orientação das professoras que circulavam pela sala, os alunos mostraram-se mais motivados e interessados do que no momento anterior. Devido à forma como a aula foi progredindo e consciente das dificuldades sentidas pelos alunos, optei por fazer uma correção escrita de todas as alíneas deste exercício e entregar, fora do tempo da aula, uma cópia da mesma, a cada aluno, para que em casa pudessem acompanhar a resolução que foi realizada na sala de aula.

3.7.5. 5.ª aula: 13 de março de 2017

Os objetivos estabelecidos para esta aula foram os seguintes: a) designar por "ângulo inscrito" num arco de circunferência qualquer ângulo de vértice no arco e distinto dos extremos e com lados passando por eles e b) saber que a amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados e, como corolários, que ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma amplitude e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

Antes do primeiro contacto com os ângulos inscritos, quis certificar-me de que os alunos tinham bem presente o que caracteriza um ângulo ao centro para posteriormente comparar com as características de um ângulo inscrito. Optei por simplificar a definição que está presente nas metas curriculares e no próprio manual dos alunos, visto que esta turma tem ainda alguma dificuldade em reconhecer e fazer uso de definições formais. Feita a abordagem teórica, realizei em grande grupo alguns exercícios muito simples para perceber se os alunos estavam a acompanhar o que foi discutido até então e em simultâneo para motivar a turma promovendo a participação dos alunos.

A relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e da do arco compreendido entre os seus lados foi retirada pelos alunos a partir de exemplos que apresentei com imagens do Geogebra, facto que os deixou satisfeitos e motivados.

No plano de aula, estabeleci que os alunos chegariam à propriedade "a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente" através de um diálogo comigo no qual os alunos assumiriam um papel bastante ativo e construtor do próprio conhecimento. E isso foi efetivamente possível e, para a generalidade da turma, foi um processo bastante fácil e intuitivo no qual apenas assumi um papel de gestora das intervenções.

O momento seguinte, de resolução de exercícios do manual em grande grupo, foi também alvo da atenção e trabalho da maioria dos alunos o que permitiu uma boa discussão dos processos utilizados e a partir daí permitiu fazer surgir a propriedade "ângulos inscritos numa semicircunferência são ângulos retos" que foi bem aceite pela turma. No entanto, não representou uma aprendizagem efetiva para os alunos visto que na resolução, também em grande grupo, de uma questão posterior (exercício 2.3 da página 90) onde poderia ser aplicada a propriedade referida, eles não fizeram uso da mesma.

De forma semelhante, a aprendizagem da propriedade "ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais", na qual eu assumi um papel mais participante, revelou não estar completamente conseguida na medida em que os alunos não conseguiram aplicá-la numa situação concreta (exercício 2.2 da página 90).

Posteriormente, no momento de trabalho autónomo, os alunos dispersaram um pouco, não estando tão focados no trabalho proposto. A turma, na sua generalidade, não mostrou muitas dificuldades na resolução do primeiro exercício. Ainda assim, houve um número bastante considerável de alunos que se recusou a fazer qualquer registo escrito das suas resoluções mesmo após me apresentarem verbalmente as justificações para os cálculos que fizeram, justificações e cálculos esses que estavam corretos mas não totalmente bem pensados do ponto de vista científico. Os restantes dois exercícios propostos para o momento de trabalho autónomo seguiram para trabalho de casa visto que a maioria da turma ainda não tinha terminado.

Aquando da enumeração dos aspetos que iriam ser abrangidos pela ficha de avaliação que se iria realizar nessa semana, os alunos mostraram instantaneamente desagrado e receio de alguns temas, de modo que pediram que na aula seguinte se fizessem exercícios de todas essas matérias.

Na posterior reflexão conjunta desta aula, foi-me sugerido que não apresentasse simplesmente as respostas aos alunos previamente escritas por mim em diapositivos de PowerPoint, isto porque, procurando eu que os alunos adquiram autonomia na escrita de justificações e respostas estruturadas, devo dar lugar a essa aprendizagem durante a aula, escrevendo, por exemplo, a resposta no quadro a partir das intervenções dos alunos ou então chamar mais alunos ao quadro para apresentarem e explicitarem a sua resposta para os restantes colegas.

Devo ter ainda em atenção a importância de estimular os alunos para o uso de linguagem simbólica, nomeadamente, no que diz respeito à utilização das letras presentes na figura para a identificação de ângulos e ressalvar que, caso seja necessário, os alunos podem acrescentar letras à figura com vista à construção de uma resposta mais coesa e estruturada.

3.7.6. 6.ª aula: 14 de março de 2017

Esta aula, que se apelida de "revisões para o teste", é desenvolvida consoante as dúvidas apresentadas pelos alunos. Uma vez que a turma mostrou interesse em resolver exercícios subordinados a outros temas que não o abordado neste estudo, a síntese desta aula não será apresentada neste relatório.

3.7.7. 7.ª aula: 16 de março de 2017

Realização do teste de avaliação.

3.7.8. 8.ª aula: 20 de março de 2017

Os objetivos que guiaram esta aula foram os seguintes: a) saber identificar e distinguir ângulos ao centro de ângulos excêntricos; b) reconhecer que ângulos inscritos são (um caso particular de) ângulos excêntricos; c) saber que a amplitude de um ângulo convexo de vértice no interior de um círculo é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto e d) saber que a amplitude de um ângulo de vértice exterior a um círculo e cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respetivos lados.

Consciente de que os conceitos abordados nesta aula poderiam confundir-se com outros aprendidos anteriormente, iniciei a aula com uma breve abordagem aos tipos de ângulos trabalhados em aula até então (ângulos ao centro e ângulos inscritos) e que peculiaridades caracterizam cada um deles no que diz respeito à sua posição relativamente à circunferência, abordagem essa bastante participada pelos alunos.

Uma vez indicada a página do manual da tarefa que se iria realizar em aula, prossegui com a leitura da primeira definição apresentada, no entanto, ao contrário do que esperava, ninguém da turma manifestou dúvida alguma em relação à mesma e, pela apatia que detetei nos rostos dos alunos, vi a necessidade de ler uma segunda vez a definição e ser eu a despoletar as dúvidas que levariam à construção gradual e conjunta do mapa concetual que me pareceu imprescindível ao longo da lecionação das aulas desta subunidade em estudo. A construção do mapa concetual foi um processo bastante participado por um conjunto alargado de alunos da turma e julgo que uma das causas para tal foi o facto de ter referido que para além destes ainda iríamos estudar outros tipos de ângulos de modo que seria muito importante que eles tivessem um esquema simples que os ajudasse a organizar todos os conceitos estudados e que se atualizasse esse mesmo esquema à medida que fossem apresentados novos conteúdos a incluir no mapa. Faço referência a uma observação de uma aluna: “Professora, então a palavra excêntricos deve querer dizer que não é no centro”, para a qual direcionei a atenção da turma e felicitei por ser uma constatação interessante.

O objetivo principal da tarefa era levar os alunos a retirarem conclusões acerca da relação entre a amplitude de um ângulo excêntrico com a amplitude dos arcos associados através da manipulação geométrica possível de realizar no GeoGebra. Assim, antes de iniciar a exploração, pedi aos alunos que estabelecessem as relações que tinham sido abordadas com respeito aos ângulos ao centro e aos ângulos inscritos, tarefa que os alunos resolveram instantaneamente e com bastante facilidade.

Na resolução da primeira questão que consistia na leitura e registo dos valores apresentados no Geogebra, os alunos, que até então apenas tinham trabalhado com valores naturais nas medidas de amplitudes de ângulos ou arcos, manifestaram alguma dificuldade em compreender o significado do valor 48,28°, por exemplo. Esta dificuldade não foi prevista por mim aquando da elaboração do plano de aula o que levou a um maior dispêndio de tempo para o esclarecimento das dúvidas subjacentes a este mesmo aspeto.

As questões 2 e 5 da tarefa exigiam alguns cálculos muito simples nos quais os alunos não manifestaram qualquer dificuldade, no entanto demoraram algum tempo a fazê-lo devido à falta de dedicação e foco na questão. Teria sido importante da minha parte, estabelecer um ritmo mais marcado durante a aula para que a duração de momentos como este não comprometesse a realização adequada de momentos posteriores mais importantes para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Devido ao desfasamento que existia entre o tempo apontado no plano de aula e o que na realidade ainda dispunha e porque os alunos começavam a dispersar, antecipei um dos momentos de aula. Assim, antes de movimentar o ponto (questão 3) pedi aos alunos que tentassem já estabelecer uma conjetura relativamente à relação existente entre a soma dos arcos e a amplitude do ângulo com base nos valores evidenciados na tabela do *Geogebra*. O desafio foi aceite pelos alunos que se empenharam em perceber que relação seria essa. A resposta não foi instantânea, mas alguns alunos conseguiram obtê-la autonomamente sem qualquer indicação da minha parte. Depois de confirmar a conjetura a que chegaram, apontei para o facto de essa relação poder ser apenas uma "coincidência" e que poderia variar consoante a amplitude do ângulo e/ou a posição do ponto A e, por esse motivo, seria importante verificarmos se a mesma se mantém noutras situações, movendo alguns pontos da figura e até alterando o raio da circunferência. Pedi então aos alunos que, em díade, escrevessem esta relação o mais formalmente possível para que, de seguida, verbalizassem a conclusão a que chegaram para os restantes colegas. Ao circular pela sala apercebi-me de que as conclusões apresentavam estruturas e graus de formalização idênticos daí que na posterior discussão em turma apenas um dos pares tenha exposto a sua conclusão e perante a aprovação e concordância de todos os alunos, prossegui para a síntese.

A dinâmica em sala de aula na parte II da tarefa foi muito idêntica à anterior, sendo que, esta última, os alunos realizaram-na de forma significativamente mais rápida e autónoma.

Durante o momento de trabalho autónomo apercebi-me de que os alunos, para determinarem a amplitude de um ângulo com vértice no interior da circunferência (exercício 2 da página 94) estavam a recorrer aos passos seguidos na realização da tarefa anterior, fazendo referência aos ângulos inscritos na circunferência, por exemplo. Assim, intencionalmente, interrompi a aula para fazer um esclarecimento a toda a turma no sentido de despertar para a utilização direta das fórmulas gerais a que se chegou na síntese da tarefa. Após esta observação, os alunos prosseguiram autonomamente na resolução dos exercícios propostos, predispondo-se a escrever a sua resposta no quadro. Algumas dessas respostas continham algumas incorreções a nível científico para as quais chamei a atenção da turma, fazendo diretamente no quadro os acréscimos necessários.

Aproximando-se o final da aula, dirigi o exercício 5 da página 95 para trabalho de casa e fiz o registo fotográfico das resoluções escritas dos alunos.

3.7.9. 9.ª aula: 21 de março de 2017

Esta aula foi pensada no sentido de proporcionar aos alunos momentos que os auxiliem a: a) designar por «ângulo de segmento», um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência; b) saber que um ângulo de segmento tem amplitude igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados; c) designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar e d) saber que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.

Devido à dispersão inicial dos alunos, senti a necessidade de chamar a atenção da turma para o primeiro assunto a abordar na aula, optando por criar um momento de discussão conjunta ao invés de apresentar diretamente os conceitos. Por este motivo, este momento da aula demorou mais do que o estipulado no plano de aula, ainda assim a opção tomada pareceu-me benéfica na medida em que os alunos tiveram uma participação bastante colaborativa o que gerou um bom início de aula. À medida que, posteriormente, os alunos acabavam de transcrever para o caderno diário o que estava no quadro, fiz uma breve síntese dos ângulos estudados até então, valorizando as intervenções dos alunos que foram sendo feitas nesse sentido e sublinhando a importância de eles próprios realizarem este tipo de sínteses “mentais” para uma melhor organização de conceitos, não só no estudo desta subunidade como também noutro contexto onde estejam implícitas muitas ideias, conceitos ou definições.

Apresentada a definição de “ângulo de segmento” procurei que os alunos a interpretassem e a tentassem explicitar e/ou relacionar com a figura apresentada em simultâneo. Apercebi-me de que embora os alunos estivessem a tentar interpretar a definição, manifestavam algumas dificuldades em fazê-lo e por isso optei por ser eu a guiar a compreensão do conceito. Ainda antes de apresentar a fórmula que relaciona a amplitude de um ângulo de segmento com a do arco compreendido entre os seus lados, certifiquei-me que os alunos conseguiam visualizar e identificar qual o arco que estava compreendido entre os lados do ângulo de segmento representado na figura.

Na posterior resolução dos exercícios de aplicação direta da fórmula apresentada no momento anterior, ao contrário do que tinha pensado no plano de aula, não fiz uma constante "exclusão de partes" dos outros tipos de ângulos, isto é, para a identificação do tipo de ângulo apresentado, ao invés de questionar se era um ângulo ao centro, inscrito, com vértice no interior ou no exterior da circunferência, optei por realçar as características do ângulo de segmento, perguntando diretamente aos alunos de que ângulo se tratava e porquê, fazendo referência ao facto de o seu vértice estar sob a circunferência, um dos seus lados conter uma corda e o outro ser tangente à circunferência. Elegi este procedimento em detrimento do previamente estabelecido devido ao fator tempo, visto que os momentos de aula anteriores de prolongaram mais do que o previsto.

A generalidade da turma revelou bastantes dificuldades na resolução autónoma dos exercícios 1 e 2 da tarefa que eu procurei esclarecer ao circular pela sala com o auxílio da professora da turma (professora cooperante). Por me parecer conveniente não iniciar o estudo dos ângulos ex-inscritos sem que os alunos saibam aplicar conhecimentos relativos aos ângulos de segmento, optei por destinar o restante tempo de aula à resolução acompanhada dos exercícios 1 e 2 da tarefa, deixando a apresentação dos ângulos ex-inscritos para a aula seguinte.

3.7.10. 10.ª aula: 23 de março de 2017

Sendo que o plano da aula anterior não foi cumprido na sua totalidade, os objetivos desta aula são parte dos da lição 110 e são eles: a) designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar e b) saber que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.

Com base no que observei ao circular pela sala durante o momento de trabalho autónomo da aula anterior, fiz algumas observações à turma relativas aos erros e/ou dúvidas mais frequentes aquando da resolução dos exercícios 1 e 2 da tarefa "ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos". Voltei a frisar a importância de justificarem as respostas visto que, uma vez que não iria ser feita a correção daquela tarefa em sala de aula, seria através das justificações que eu poderia dar um *feedback* efetivamente adequado e auxiliador das aprendizagens dos alunos. Adverti ainda para o facto de, na resolução de exercícios como estes em que são apresentados diversos ângulos na mesma figura, ser vantajoso que os alunos comecem por perceber de que tipo de ângulo se trata, classificando-o no que diz respeito à sua posição relativamente à circunferência.

À semelhança do que tinha feito em todas as aulas anteriores, mencionei os ângulos estudados até então, com a particularidade de nesta aula ter apresentado um quadro-síntese que foi sendo completado através das intervenções dos alunos. A maior dificuldade da turma no preenchimento do quadro-síntese incidiu na fórmula que relaciona a amplitude de um ângulo de vértice no interior da circunferência com as amplitudes dos arcos que lhe estão associados.

Sendo que muitos dos alunos ainda não tinham terminado o último exercício proposto na aula anterior, cedi alguns minutos para que o concluíssem, pedindo aos alunos que já o tinham concluído para colaborarem com os respetivos pares. No momento de reflexão da aula, reconheci que dediquei demasiado tempo à conclusão da resolução deste exercício, devendo ter exigido um ritmo de aula mais acelerado.

A forma como se fez a construção do ângulo ex-inscrito (a partir do ângulo inscrito a que é adjacente e suplementar) pode ter sido impulsionadora do modo como os alunos, posteriormente, calcularam a amplitude de um ângulo ex-inscrito, isto é, através da amplitude do ângulo inscrito e não de acordo com o estabelecido como objetivo para esta aula e que é concordante com o que é proposto pelas metas curriculares.

O momento posterior dedicado à resolução de exercícios de consolidação foi, segundo o meu ponto de vista, bem aproveitado pela maioria dos alunos na medida em que trabalharam efetivamente e esforçaram-se por apresentar justificação para os cálculos que efetuaram. Aquando da correção feita no quadro por alunos que se voluntariaram para tal, pedi aos mesmos que fizessem a explicitação das respostas que apresentaram para os restantes, desafio no qual os alunos manifestaram bastantes dificuldades. Algumas das incorreções ou incompletudes das respostas expostas foram detetadas e corrigidas pela turma, no entanto tive de fazer um número bem considerável de observações e/ou acréscimos às respostas apresentadas e discutidas. Foi notório o esforço gradual dos alunos em estruturar cada vez melhor as suas respostas tendo em conta as observações feitas por mim e/ou pelos colegas, adquirindo o hábito de, por exemplo, quando necessário, acrescentar novas letras numa figura para identificar corretamente um ângulo através de três letras maiúsculas. Todo este processo consumiu mais tempo de aula do que o esperado daí que não tenham sido discutidos e resolvidos em turma todos os exercícios propostos.

3.7.11. 11.ª aula: 27 de março de 2017

Com esta aula pretendia-se que os alunos aprendessem a: a) provar que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)\times 180°$ e saber que a soma de n ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro e b) reconhecer que, num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ e a de um ângulo externo é dada por $\frac{360°}{n}$.

Antes de iniciar o momento de resolução da tarefa, certifiquei-me de que os alunos tinham presente a noção de ângulo interno de um polígono também no sentido de introduzir um novo subcapítulo desta subunidade visto que até então, em aula, só tínhamos abordado a posição de ângulos relativamente a uma circunferência, iniciando-se agora o estudo dos ângulos de polígonos.

Na distribuição dos vários polígonos pela turma tive em atenção o facto de ser benéfico para a realização da tarefa que dois alunos consecutivos não tivessem polígonos com o mesmo número de lados. Assim, aquando da leitura do enunciado que não suscitou qualquer dúvida da parte dos alunos, referi que, na questão 2, poderiam ter atenção o resultado que o colega do lado obteve e assim tentarem preencher as segunda e terceira colunas da tabela, sendo que imprescindível seria que cada um preenchesse a linha que correspondia ao polígono que lhe foi entregue.

Os alunos resolveram a tarefa de forma bastante autónoma, motivada e revelavam poucas dificuldades, participando de forma muito positiva na discussão dos resultados em turma e no preenchimento da tabela, de modo que o meu papel durante esse momento foi essencialmente regulador das intervenções feitas pelos alunos. Realço apenas o facto de, na quarta coluna, os alunos apresentarem apenas os valores mesmo após eu ter acrescentado na primeira linha a notação associada (S_i).

Toda a restante exposição teórica impulsionadora da conjetura e exploração por parte dos alunos seguiu de forma bastante intuitiva. No entanto, na posterior resolução de exercícios de aplicação de conhecimentos, a maioria da turma mostrou dificuldades em reconhecer (no exercício 4) que, independentemente do número de lados de um polígono, a soma dos seus ângulos externos é sempre $360°$. Para além disso, ainda que tivessem descoberto intuitivamente as fórmulas associadas à amplitude de cada ângulo interno ou externo de um polígono regular, raros foram os casos de alunos que as relacionaram autonomamente com o que era pretendido nas questões 5 e 6. Ainda assim, após esclarecimento e auxílio por parte das professoras presentes na sala, os alunos rapidamente se voluntariaram para escrever a sua resposta no quadro. Como todas as alíneas dos exercícios 3, 4, 5 e 6, apenas exigiam cálculos muito simples, não pedi aos alunos qualquer esclarecimento das respostas apresentadas, fazendo apenas observações relativas à falta de notação ($\alpha_i, S_i, \alpha_e, S_e$), ressalvando que, embora esta notação não seja universal ou obrigatória em situação de exame, é uma forma simples de estruturarem a resposta quando, por exemplo, numa questão não lhes é apresentada qualquer figura de um polígono como é o caso do enunciado dos exercícios em causa.

A primeira alínea do exercício 8 foi discutida em turma, tendo sido eu a escrevê-la no quadro visto que nenhum aluno se voluntariou para tal, fruto das muitas dificuldades em realizá-la (apenas dois alunos conseguiram resolver esta questão).

Devido às dificuldades supracitadas, o plano de aula não foi cumprido na sua totalidade (a aula terminou com a resolução da questão 8.1) tendo os restantes exercícios propostos seguido para trabalho de casa.

3.7.12. 12.ª aula: 28 de março de 2017

Na continuação da aula anterior e tendo em vista a aplicação e consolidação de conhecimentos, esta aula foi ao encontro dos seguintes objetivos: a) saber que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)\times 180°$ e que a soma de n ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro; b) **s**aber que, num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ e a de um ângulo externo é dada por $\frac{360°}{n}$ e c) reconhecer que a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso.

Embora o raciocínio estabelecido para as restantes duas alíneas do exercício 8 do manual fosse idêntico à primeira, realizada na aula anterior, apenas dois alunos da turma concretizaram as questões referidas, os quais se recusaram a vir ao quadro expor a resposta que desenvolveram. Por esse motivo, a discussão e resolução dos exercícios foi realizada em turma, tendo sido eu a escrevê-las no quadro. Pelas intervenções feitas pelos alunos, apercebi-me de que as fórmulas estavam compreendidas ou memorizadas, sendo que a maior dificuldade presente na turma é a interpretação do enunciado, reconhecendo e movendo os conhecimentos adquiridos adequados para a resolução de determinado exercício. Assim, em cada uma das questões, procurei que os alunos identificassem “o que se quer saber” e “o que já se sabe através do enunciado” de modo a reconhecerem que fórmula poderão aplicar para chegar à resposta pretendida. Alguns alunos manifestaram também dificuldades a nível do raciocínio algébrico, daí que tivesse consumido mais tempo de aula do que o previsto para a correção do trabalho de casa.

Durante a realização, em grande grupo, do exercício 10, apercebi-me de que os alunos não tinham simplesmente memorizado a fórmula pois começaram por referir que o polígono em questão podia ser decomposto em quatro triângulos e assim tinham “que fazer 4×180”. Posteriormente, aquando da discussão do exercício 10, pareceu-me importante clarificar devidamente as diferenças deste enunciado relativamente às questões anteriores, fazendo referência e sublinhando a distinção entre polígonos regulares e irregulares. Para além desse aspeto, esclareci que não é necessário fazerem a decomposição de um polígono em triângulos para saber o valor da soma dos ângulos internos desse polígono pois, na realidade, sabe-se que um polígono com n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos através das diagonais traçadas a partir de um dos vértices do polígono em questão.

Para iniciar o momento seguinte da aula, comecei por pedir aos alunos que, através do sumário, referissem que aspeto iria ser abordado de seguida e perante a resposta dada perguntei-lhes o que entendiam ou que acham que era um polígono inscrito na circunferência. E, tal como esperado, os alunos consideravam apenas o facto de o polígono estar “dentro” da circunferência. Como essa era a resposta esperada, o slide que apresentei de seguida veio exatamente ao encontro do que era pretendido: que os alunos, depois de eu referir que um dos polígonos estava inscrito na circunferência e outro não, por comparação, conseguissem reconhecer outra condição necessária para um polígono ser inscrito numa circunferência. Na realidade não foi necessária qualquer intervenção da minha parte pois em confronto com as figuras apresentadas, a turma, de imediato, reconheceu ou conjeturou que um deles não era considerado inscrito na visto que alguns dos seus vértices não estavam sob a circunferência.

Este momento de aula caracterizou-se pelo nível de concentração e participação dos alunos, que permitiu trabalhar em aula capacidades como a comunicação matemática e a conjetura.

Devido ao descontentamento e despreocupação que os alunos tinham vindo a demonstrar relativamente à realização e entrega do portfólio, fiz uso dos últimos minutos desta aula no sentido de motivar a turma para a concretização do mesmo.

3.7.13. 13.ª aula: 30 de março de 2017

Para que haja um encadeamento dos conteúdos abordados ao longo das aulas, à medida que distribuí os enunciados das tarefas pelos alunos, ajudei-os a estabelecerem uma relação com a aula anterior perguntando o que tinha sido aprendido e perante a resposta pronta dos alunos (polígonos inscritos numa circunferência), pedi-lhes que referissem alguma peculiaridade dos polígonos regulares de que tenhamos falado nessa mesma aula. O facto de os alunos terem conseguido responder a estas questões iniciais foi, para eles próprios, um aspeto motivador para a sua participação na aula. De seguida pedi que escrevessem uma propriedade no caderno diário que, por dizer respeito essencialmente à segunda tarefa desta aula, deveria ser relembrada mais tarde.

Com o objetivo de motivar a realização da primeira tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular", optei por apresentá-la à turma como um passo na construção de um polígono regular, referindo que um método rápido para construir um polígono regular consiste em inscrevê-lo numa circunferência e para tal é necessário estabelecer um raciocínio análogo ao que se efetuaria nesta primeira tarefa.

Ainda antes da leitura do enunciado da tarefa, adverti para o facto de alguns enunciados terem uma incorreção na numeração dos exercícios. Procedi então à leitura do enunciado, a fim de me certificar de que os pontos identificados na figura estão legíveis para todos, de sublinhar a importância de justificarem a relações que estabeleceriam na questão 1.1. e de esclarecer o significado do termo "n-ágono regular". Concluída a leitura e esclarecimento do enunciado da tarefa, dei início ao momento de resolução da tarefa a pares e nesse instante reconheço que deveria ter sido dada aos alunos a informação do intervalo de tempo que teriam para a resolverem em díade.

Ao circular pela sala apercebi-me, simultaneamente, de que nenhum dos alunos conseguiu apresentar a justificação pedida na questão 1.1 ainda que a maioria dos alunos tenha estabelecido a relação pretendida. De facto, tendo em atenção a especial dificuldade dos alunos desta turma em justificar as respostas dadas e reconhecendo que esta justificação não era simples, esta dificuldade era já esperada por mim aquando da realização do plano de aula. Assim, indiquei de imediato uma página do manual na qual estava presente uma propriedade que seria um auxílio na justificação da resposta dada. Esta opção, de indicar uma página do manual, foi tomada com dois propósitos: sublinhar a importância e utilidade de algumas propriedades já trabalhadas em aula e mostrar aos alunos que durante o estudo individual, em caso de dúvida, devem recorrer ao manual ou ao caderno diário com vista a esclarecer a mesma.

Ainda assim, após a minha sugestão, os alunos continuaram a manifestar alguma dificuldade em justificar a resposta visto que na página indicada são apresentadas algumas propriedades, três das quais recíprocas umas das outras, levando os alunos a escolherem intuitivamente a primeira das três, não sendo essa a que justificava corretamente a resposta à questão em causa. Facto esse que me leva a concluir que a complexidade da justificação requerida era muito superior ao nível de aprendizagem dos alunos da turma.

Relativamente à questão 1.2, optei por fazer uma intervenção para toda a turma chamando a atenção para a importância de estruturarem bem a resposta, identificando devidamente o que estão a calcular, neste caso, a amplitude de um determinado ângulo, através de dados da figura ou, se necessário, de legendas que podem acrescentar no próprio enunciado.

Para que os alunos pudessem retirar proveito desta tarefa, a realização autónoma da questão 1.2 e de algumas linhas da questão 3 parecia-me essencial, de modo que para dar tempo a todos os alunos de as realizarem, optei por indicar um exercício do manual aos alunos que vão terminando a realização da tarefa. Alguns desses alunos, após realizarem este exercício extra, esperaram alguns minutos até que eu começasse o momento de conclusão da tarefa o que causou algum ruído na sala de aula. Assim, reconheço este como um aspeto a melhorar, no sentido de perceber quando é que devo parar o momento de trabalho autónomo ainda que alguns alunos não a tenham terminado, mesmo que estejam interessados em fazê-lo.

No momento de conclusão da tarefa, apercebi-me de que a dificuldade em justificar a questão 1.1 permanecia e por esse motivo, acabei por desenvolver um papel mais ativo do que o previsto em plano de aula. Na conclusão das questões 1.2 e 2, assumi essencialmente um papel regulador das intervenções dos alunos e em simultâneo fiz algumas observações a nível de simbologia e escrita/apresentação das respostas.

Seguiu-se o momento da síntese das aprendizagens, no qual os alunos desempenharam um papel bastante ativo, intervindo de forma muito ordeira e assertiva, o que me leva a concluir que, de forma geral, a maioria dos alunos da turma realizou as aprendizagens previstas com a realização desta tarefa.

Enquanto os alunos transcrevem para o caderno diário as conclusões retiradas da tarefa “polígonos inscritos numa circunferência”, recolhi as resoluções dos alunos e em simultâneo distribuí os enunciados da tarefa “Construir polígonos regulares” do qual li para a turma apenas a introdução na qual eram apresentadas as duas conclusões retiradas da tarefa anterior estabelecendo, assim, a ligação entre as primeira e segunda tarefas desta aula. Assumindo um discurso motivador, dirigi esta tarefa aos alunos como um desafio que eles deveriam tentar resolver sem qualquer explicitação inicial da minha parte.

Os alunos mostraram-se bastante empenhados e autónomos na resolução da tarefa, no entanto, a falta de material por parte deles levou a que o tempo despendido fosse superior ao estabelecido no plano de aula. À medida que os alunos terminavam, fui sugerindo que no verso na folha fizessem a construção de um outro polígono regular sem recorrerem à informação dada na tarefa.

A conclusão da tarefa foi feita através da enumeração dos passos a realizar na construção de polígono regular inscrito numa circunferência e posterior projeção dos mesmos.

3.7.14. 14.ª aula: 3 de abril de 2017

A primeira e grande parte desta aula foi dedicada à entrega e correção do teste de avaliação e assim, apenas os últimos 20 minutos da aula são de interesse para este estudo. O que se pretendia essencialmente com a tarefa realizada era que os alunos aplicassem os conhecimentos adquiridos desta subunidade numa situação do real: “o remate do Ronaldo”.

Comecei por tentar retirar, pelas intervenções da turma, a maior quantidade de informação de que se lembrassem do vídeo apresentado no início desta subunidade, na aula de 2 de março, no sentido de motivar os alunos para a discussão que se seguiria e de perceber se os alunos iriam fazer referência a algum dos conceitos aprendidos posteriormente à visualização do vídeo.

Quando fiz a primeira interrupção durante o primeiro vídeo, pedi aos alunos que pensassem acerca e estabelecessem uma relação entre as amplitudes dos ângulos que o Ronaldo faria com a baliza caso ele se movesse ao longo da circunferência (círculo central) e que, posteriormente, justificassem a relação estabelecida. Ainda que tivesse esperado que os alunos sentissem dificuldade em justificar que a amplitude se mantinha igual, não esperei que muitos dissessem que a amplitude aumentava, tal como aconteceu. Assim, criei um momento de discussão em que os alunos tinham de explicar o motivo que os levava a estabelecer determinada relação. Foi então que os alunos que tinham estabelecido a relação correta (a amplitude mantém-se) apresentaram um argumento válido para a conclusão a que chegaram.

Durante todo este momento de discussão, a minha maior dificuldade foi em gerir as intervenções dos alunos, isto porque muitas das justificações que apresentavam eram com base no que visualizavam, facto que foi essencial no estabelecimento da conjetura inicial, mas que por si só não possibilitava o desenvolvimento de uma argumentação coerente e sólida. Assim, vi-me obrigada a valorizar e destacar, das observações que iam sendo feitas pela turma, apenas aquelas que colaboravam com a evolução da resolução do exercício, deixando de parte as que levavam a outros aspetos alvo de uma discussão maior.

3.7.15. 15.ª aula: 4 de abril de 2017

Sendo esta a última aula do segundo período e também da minha intervenção letiva, foi destinada à avaliação crítica e construtiva do trabalho realizado por cada um, pela turma e por mim. Também por esse motivo, acredito, a maioria da turma teve um atraso superior a 10 minutos, facto que levou a que a aula tivesse uma duração efetiva de aproximadamente 30 minutos.

O momento inicial foi de autoavaliação no qual os alunos proferiam simplesmente qual a nota que pensavam ser a merecida com base no trabalho desenvolvido. Foi feita desta forma pois é o modo usualmente utilizado pela professora da turma.

Após isso, distribui os questionários através dos quais eu obteria a maioria das avaliações dos alunos relativamente à lecionação desta subunidade, sublinhando a importância de responderem a todas as questões de forma argumentada, isto é, que não respondessem simplesmente “não gostei disto ou daquilo”. Fi-los pensar que aquele seria o momento e o meio próprios para que se fizessem “ouvir”, para darem o seu parecer, que poderia ou não ser um ponto de partida para alguma mudança. Salvaguardei o facto de aquele não constituir um elemento de avaliação pois embora pedisse que cada um escrevesse o seu nome no questionário, isso só serviria para posteriormente saber de quem eventualmente poderia retirar alguns dados para a minha dissertação.

Ainda com os questionários na posse de cada aluno, criei um momento de avaliação mais informal, no qual questionei os alunos acerca de questões mais concretas como por exemplo, quais os métodos de estudo utilizados pelos alunos ao longo deste período (no sentido de perceber se faziam mais uso do manual ou dos registos escritos que lhes pedia que transcrevessem do quadro para o caderno diário). Para minha surpresa, alguns alunos referiram que recorreram muito às tarefas que lhes tinha entregue ao longo de toda a minha intervenção (para além da lecionação desta subunidade).

Capítulo 4: Metodologia do estudo

4.1. Opções metodológicas

A natureza do meu estudo enquadra-se no paradigma interpretativo e qualitativo e a metodologia específica utilizada foi o estudo de caso, visando a descrição e a compreensão das aprendizagens de alguns alunos, em particular, em sala de aula.

Gomez, Flores e Ramirez (1996, p. 32), apontando para uma definição apresentada por Denzin e Lincoln (1994) de investigação qualitativa, clarificam que qualquer realidade estudada por investigadores qualitativos deve ser analisada no seu contexto natural, reconhecendo que os investigadores devem tentar interpretar os fenómenos de acordo com os significados que têm para as pessoas implicadas.

Ainda Gomez, Flores e Ramirez (1996, p.33), fazem referência a Taylor e Bogdan (1986) que consideram investigação qualitativa como "aquela que produz dados descritivos: as próprias palavras das pessoas, ditas ou escritas e a conduta observável" e das características da investigação qualitativa apontadas por estes últimos autores, ressalvo as seguintes:

- O investigador qualitativo observa as pessoas e o seu contexto real segundo uma perspetiva holística, ou seja, as pessoas ou grupos de pessoas e os cenários em que se situam não são reduzidos a variáveis, mas sim considerados como um todo;
- O investigador qualitativo deve ter em atenção os efeitos que ele próprio pode ter sobre os seus objetos de estudo (pessoas, grupos, entre outros);
- Para o investigador qualitativo, todas as perspetivas são valedouras.

Foi na sala de aula, conservando o ambiente de aula a que os alunos estavam habituados, que realizei a recolha de dados essencialmente descritivos procurando aceder aos modos de pensar dos alunos durante a realização das tarefas. Segundo

Bogdan e Biklen (1994), estes aspetos que tive em consideração no meu estudo dizem respeito a quatro características, entre outras, que estão na base da investigação qualitativa:

- A fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados;
- Os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo;
- Os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados;
- O investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Segundo Flick (2004) e Rodríguez et al. (1999), citados por Meirinhos e Osório (2010, p. 60), a observação participante é um dos procedimentos de observação mais utilizados na investigação qualitativa. O fundamental desta observação participante é a integração do investigador no campo de observação. Para além de observar segundo a perspetiva de um membro participante, o investigador pode também influenciar o que observa devido à sua participação, tornando-se parte ativa do campo observado.

No entanto, ressalvo uma das características apresentadas por Taylor e Bogdan (1986): "o investigador qualitativo deve ter em atenção os efeitos que ele próprio pode ter sobre os seus objetos de estudo (pessoas, grupos, entre outros)" que, a meu ver, deve ser tida bastante em conta aquando da análise e interpretação dos dados, de modo a não retirar validade às conclusões retiradas.

Yin (2003, citado por Henriques & Ponte, 2008, p. 12) refere que perante uma realidade que não pode ser interpretada e analisada fora do seu contexto, pode optar-se por uma abordagem qualitativa recorrendo a estudos de caso. Estes surgem com o objetivo de compreender o "como" e os "porquês" de uma entidade, seja ela "um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social", partindo de uma investigação particularística que, debruçando-se nesse exemplo específico, reconhecendo as características que permitem e podem ser generalizadas "para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse" (Ponte, 2006, p. 2).

Em primeiro lugar, um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações e/ou documentos (Yin, 1984, citado por Ponte, 1994, p. 3).

Ponte (2002), em *Estudos de caso em educação matemática*, aponta para o facto de muita da investigação realizada no mundo da Educação em Matemática, ainda que não exclusivo desta área, que se debruça sobre questões da aprendizagem dos alunos e/ou do conhecimento e prática profissional de professores, recorre a estudos de caso. Coutinho e Chaves (2002, p. 230), citando outros autores, apontam em que situações pode e/ou deve fazer-se uso dos estudos de caso: quando o investigador não consegue manipular qualquer variável em estudo para estabelecer relações causais entre as mesmas (Cohen & Manion, 1989); quando não consegue identificar as variáveis relevantes para o estudo devido à complexidade da questão (Ponte, 1994); quando é a única estratégia possível de implementar na situação real que se pretende estudar (Punch, 1998); ou ainda noutras situações excecionais (Yin, 1994).

Quanto ao seu propósito, Ponte (2006, p. 5) distingue três tipos de estudos de caso: exploratórios, quando servem o propósito de recolher informação preliminar acerca do assunto tratado ("pode ser vantajoso como estudo piloto de uma investigação em larga escala"); descritivos, quando cumprem essencialmente a finalidade de dizer/descrever o que se observa ("pode ser necessário para preparar um programa de intervenção"); ou analíticos, no caso de servirem o propósito de problematizar o objeto de estudo, sendo um ponto de partida para uma nova teoria e/ou um aspeto a considerar no confronto com outra já existente e são estes que "que proporcionam um mais significativo avanço do conhecimento". Os estudos de caso analisados neste relatório serviram primordialmente o propósito de descrever o que foi observado durante a intervenção, retirando posteriormente algumas conclusões da sua análise, sendo por isso, estudos de caso descritivos.

Stake (1995; citado por Coutinho & Chaves, 2002) faz uma outra distinção dos tipos de caso consoante a sua finalidade: o intrínseco, quando o estudo individual de um caso é o objetivo último e o foco de interesse da investigação; o instrumental, quando o caso serve para fornecer dados que, pela sua reflexão, permitam o refinamento de uma teoria ou para permitir maior conhecimento de algo mais abrangente que o caso particular; ou coletivo, se o caso instrumental é um conjunto de vários casos que, por comparação, permite um conhecimento mais sólido da situação, fenómeno ou população. Ainda que tenha analisado mais do que um estudo de caso, seria necessário um maior número de casos para que fossem considerados coletivos de formar a conseguir generalizar os resultados e/ou conhecimentos a uma população de maior dimensão. A finalidade destes estudos de caso está na análise de situações particulares num contexto escolar próprio, e por isso se classificam como casos intrínsecos.

Segundo Ponte (1994, p. 2), o estudo de caso é essencialmente um "*design* de investigação" [itálico do autor] que tem "sempre um forte cunho descritivo". Para isso apoia-se numa "descrição grossa" (*thick description*) [aspas e itálico do autor], isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa, do seu objeto de estudo. Como já mencionei, os estudos de caso tidos em conta neste relatório servem um propósito descritivo. No entanto, segundo o mesmo autor (Ponte,1994), tal não implica que sejam meramente descritivos – de um modo geral, quando isso acontece o seu valor é muito reduzido. Na verdade, um estudo de caso, ainda que descritivo, pode ter um alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação.

Ainda a propósito do caráter descritivo do estudo de caso é necessário ter em atenção o que é referido por Stake em Coutinho e Chaves (2002, p. 236): "É fundamental perder o melhor tempo na análise dos melhores dados". De um conjunto de 15 aulas, muitas são as resoluções e intervenções dos alunos que são registadas. No entanto, importa retirar delas o maior proveito possível no âmbito desta investigação, tal como refere Wolcott (1990, citado por Coutinho & Chaves, 2002, p. 236):

> o ponto crítico na investigação qualitativa não é tanto acumular dados, mas "filtrar" (i. e, livrar-se de) a grande parte dos dados que acumula. A solução está em descobrir essências e revelar essas essências com suficiente contexto, sem contudo ficar obcecado em incluir tudo o que potencialmente é passível de ser descrito.

4.2. Métodos de recolha de dados

O objetivo principal do meu estudo incide na análise do raciocínio geométrico dos alunos do 9.º ano, no entanto, de forma natural, é impossível ter acesso direto ao pensamento ou raciocínio matemático dos alunos (Henriques & Ponte, 2008; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Os mesmos autores referem que para se chegar minimamente ao raciocínio dos indivíduos é necessário que eles o comuniquem, que se observem manifestações desse pensamento que permitam ao investigador inferir alguns processos e/ou características da atividade matemática desenvolvida por determinado aluno. O NCTM (2007, citado por Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, p. 360) refere que "somente ao observar as suas representações (dos alunos), os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos". Desse modo, seria pertinente apostar na recolha de resultados que me facultassem informações a propósito dessas mesmas representações.

Assim, com base no que foi referido neste capítulo até então, a concretização deste trabalho recorreu a técnicas próprias da investigação qualitativa (Henriques & Ponte, 2008) que me permitissem retirar resultados suficientes para analisar, sendo uma delas a recolha de dados documental dos alunos que se tomam como estudos de caso, nomeadamente os documentos produzidos pelos mesmos durante as atividades resultantes das tarefas propostas dentro e fora da sala de aula que incluem as resoluções escritas das tarefas, os ficheiros Geogebra, as resoluções do teste escrito e o portefólio da disciplina. A recolha documental abrange ainda uma ficha diagnóstico e um questionário. A ficha diagnóstico (Anexo 5), realizada na aula anterior ao início da lecionação desta subunidade, foi proposta no sentido de perceber que alunos poderiam constituir os estudos de caso da minha investigação na medida em que apresentassem respostas que clarificassem o seu raciocínio, independentemente de estarem corretas ou não. Em simultâneo, esta mesma ficha diagnóstico tinha o objetivo de me dar a conhecer os conhecimentos dos alunos no âmbito da geometria e em tópicos concretos que seriam aprofundados nesta subunidade. O questionário (Anexo 14) preenchido pelos alunos na última aula da mesma subunidade, aula essa que incluiu momentos de auto e heteroavaliação, servia o propósito de fazer um levantamento das maiores dificuldades ou interesses dos alunos no estudo do tópico "ângulos e circunferência".

A observação direta e participante das aulas foi também um método privilegiado através da videogravação das mesmas e das minhas notas de campo. Estas últimas incluem não só as grelhas de observação sistematizada com o registo de critérios como a assiduidade e realização dos trabalhos de casa, mas também algumas reflexões breves que fiz em momentos imediatamente posteriores à aula que me permitiram o registo e já uma análise "a frio" de determinados aspetos tendo em conta algumas interações entre alunos e alunos-professora na sala de aula. Assim, as notas de campo serviram também como registo reflexivo relativamente ao decorrer da aula e à estruturação das tarefas, no que diz respeito à concretização dos objetivos que se pretendiam alcançar com as mesmas e a sua adequação ao público-alvo. Estes registos (videogravação e notas de campo) permitiram a reconstituição das situações de ensino por análise das interações, das argumentações, e das participações dos alunos.

4.3. Participantes

A observação que realizei para o meu estudo recaiu dobre toda a turma de forma global. O Quadro 10, apresentado do subcapítulo seguinte, foi aliás construído com base nas observações que registei dos diferentes alunos da turma durante a minha intervenção letiva.

Para uma recolha e análise de dados particulares, escolhi duas alunas da turma: a Teresa e a Matilde. A minha escolha teve em atenção os seguintes critérios:

· o desempenho, isto é, a dedicação ao trabalho realizado tanto em aula como em casa bem como a participação em sala de aula;

· a assiduidade, tendo em conta que um número considerável de alunos se encontrava em situação de suspensão escolar e

· a completude das respostas, uma vez que ao longo do ano letivo me foi possível observar que muitos dos alunos da turma se recusam a escrever respostas completas no caderno diário, optando por apenas apresentar o resultado ou a conclusão final no próprio manual sem qualquer tipo de justificação.

4.4. Análise de dados

Segundo Coutinho e Chaves (2002, p. 238), na investigação qualitativa "é clara, na maioria dos casos, a preocupação pela referência a um quadro teórico que enquadre a investigação empírica e sustente as evidências encontradas". De acordo com o que foi apresentado no capítulo do enquadramento curricular e didático, construí o quadro que se segue e que constitui uma das bases da minha análise dos dados obtidos. Van de Walle (2004, citado por Putten 2008), na abordagem que faz à teoria de van Hiele, defende que existe, em qualquer nível, um objeto de pensamento (*thinking subject*) e um resultado do pensamento (*thinking result*) que interpreto como o ponto de partida e o ponto de chegada de cada nível. Estes conceitos, de objeto de pensamento e resultado de pensamento, foram adotados por mim na construção do quadro seguinte. O que designo por "características" resulta de observações ou exemplos de vários autores que interpretei e transpus para a aprendizagem da subunidade "Ângulos e circunferência".

Quadro 10: Características dos níveis de van Hiele na subunidade ângulos e circunferências.

Nível	Objeto de pensamento	Características	Resultados do pensamento
1. Visualização	Os ângulos e a sua aparência	a) Distinguem uns ângulos dos outros por comparação, similaridade visual, e não pelas características de cada tipo.	Os ângulos são agrupados pela aparência.
		b) Conhecem os conceitos de centro da circunferência, ângulo ao centro, arco menor, arco maior, corda, polígono e lado de um polígono.	
2. Análise	Classes/Grupos de ângulos	a) Pensam por que razão um ângulo ao centro não é um ângulo inscrito.	Os ângulos são agrupados com

	mais do que cada caso	b) Sabem algumas propriedades que caracterizam os ângulos, mas as mesmas ainda não estão organizadas.	base em algumas das suas propriedades
		c) A razão pela qual se agrupam determinados tipos de ângulos, torna-se mais clara à medida que o aluno identifica propriedades dos mesmos.	
		d) As próprias representações dos ângulos são o suporte e a base para o reconhecimento de algumas das suas propriedades.	
		e) Conhecem os conceitos de extremos de um arco, arco correspondente, ângulo inscrito, ângulos internos e externos de um polígono.	
3. Dedução informal	As propriedades dos ângulos e dos polígonos	a) Começam a organizar as propriedades em sistemas conceptuais.	Relações entre as propriedades de alguns ângulos ou polígonos.
		b) As relações estabelecidas entre propriedades variam progressivamente, começando por associações empíricas até à inferência de uma propriedade através de outra.	
		c) As propriedades/definições dos ângulos já são consideradas, sem a necessidade de uma imagem de	

		suporte às mesmas. Eles estabelecem inferências acerca de propriedades e operam sobre elas, não sobre as imagens.	
		d) Conhecem os conceitos de segmento de círculo, arco subtenso, ângulo excêntrico e polígono regular.	
4. Dedução	As relações entre propriedades de ângulos ou polígonos	a) Os alunos reconhecem a necessidade e importância das demonstrações para se provar a veracidade de determinada afirmação.	Sistemas axiomáticos para raciocinar dedutivamente.
		b) Os alunos sabem o que são proposições, axiomas e condições suficientes e necessárias, conseguindo construir uma demonstração formal de teoremas através de uma sequência lógica das mesmas.	
5. Rigor	Sistemas axiomáticos para raciocinar dedutivamente.	a) Os alunos refletem acerca de diferentes sistemas axiomáticos dedutivos, conseguindo comparar os mesmos e destacar as suas diferenças.	Comparações entre diferentes sistemas axiomáticos de Geometria.

Gutiérrez e Jaime (1998) referem que, baseando-se o raciocínio matemático na realização de alguns dos processos de reconhecimento e descrição, uso ou formulação de definições, classificação e demonstração, a análise dos níveis de raciocínio segundo van Hiele exige que se investigue como é que os alunos realizam cada um dos processos anteriormente indicados. Os mesmos autores sugerem algumas características de cada processo em cada nível de van Hiele apresentadas no Quadro 11. Na leitura e/ou análise do quadro, deve ter-se em conta que as células em branco dizem respeito a processos matemáticos que não são específicos ou característicos de determinados níveis de van Hiele.

Quadro 11[12]: Características dos processos matemáticos, segundo Díaz, Gutiérrez e Jaime (1998, p. 32).

Processos	**Nível 1**	**Nível 2**	**Nível 3**	**Nível 4**
Reconhecimento e descrição	1R) De atributos físicos/propriedades matemáticas simples	2R) De propriedades matemáticas		
Uso de definições		2UD) Definições com estrutura simples	3UD) Definições com qualquer estrutura	4UD) Aceita-se a equivalência de definições
Formulação de definições	1FD) Lista de propriedades físicas	2FD) Lista de propriedades matemáticas	3FD) Conjunto de propriedades necessárias e suficientes	4FD) Demonstra-se a equivalência de definições
Classificação	1C) Exclusiva, baseada em atributos físicos	2C) Inclusiva (ou exclusiva) conforme a estrutura lógica seja simples (ou complexa)	3C) Inclusiva ou exclusiva de acordo com as definições usadas	

[12] A numeração deste quadro é da minha autoria para facilitar a referência a este quadro aquando da análise de dados. 1R), significa, por exemplo, processo de Reconhecimento no nível 1; 3FD) diz respeito ao processo de Formulação de Definições no nível 3; analogamente para as restantes parcelas do quadro.

Demonstração		2D) Empírica, verificação de exemplos	3D) Dedutiva, abstrata e informal	4D) Dedutiva, abstrata e lógico-formal

A análise dos estudos de caso foi realizada sempre ao encontro das questões que motivaram este estudo. Para esta análise optei por selecionar um conjunto de resoluções dos alunos das quais pudesse retirar dados que se mostrassem mais influentes ou reveladores para esta mesma investigação. De acordo com a fundamentação teórica, recorrendo nomeadamente aos quadros anteriormente apresentados neste ou no primeiro capítulo, procurei posicionar cada um dos participantes do estudo num nível de raciocínio geométrico de van Hiele com base no trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo desta subunidade. Pelo que já foi referido no que diz respeito à importância da análise e estudo dos processos matemáticos envolvidos na atividade matemática desenvolvida por qualquer aluno, esses processos constituíram um importante critério de análise do nível de raciocínio do aluno.

Tal como referem Brunheira e Ponte (2016), uma tarefa e a resolução da mesma por parte de um aluno só pode ser considerado como um indicador do nível de raciocínio do estudante, isto é, na verdade, mesmo fazendo uso de um quadro teórico e de uma caracterização criteriosa, ao investigador ou professor, não é possível associar diretamente um nível de raciocínio através de uma única resposta. É necessário, por isso, avaliar o trabalho desenvolvido pelo aluno num longo espaço de tempo para se lhe atribuir um dado nível ou verificar a evolução de um nível para outro. Assim, o recurso e uso dos quadros é feito com a consciência de que a associação de um determinado aluno a um nível não caracteriza totalmente o raciocínio geométrico do aluno, nomeadamente devido ao facto de essa mesma associação se apoiar em produções escritas dos mesmos que, devido à sua natureza e/ou quantidade, podem não ser reveladoras da real estruturação espacial e domínio de conceitos desse mesmo aluno.

A nível da estruturação espacial procuro perceber a perceção visual ou a representação mental que os alunos têm de determinados ângulos ou polígonos quanto à sua posição e forma relativamente à circunferência. No domínio de conceitos, a minha análise incide no reconhecimento que os alunos têm de algumas propriedades dos diferentes ângulos ou polígonos abordados nesta subunidade, nomeadamente: ângulo ao centro, ângulo inscrito, ângulo-de-segmento, ângulo ex-inscrito, polígonos inscritos numa circunferência, ângulos internos e externos de um polígono inscrito numa circunferência. Ainda no domínio de conceitos, é tido em consideração o modo como os alunos usam determinado conceito (dos supracitados) nas suas respostas.

A referência aos quadros teóricos, devidamente numerados, é feita através de siglas. Assim, a sigla "Quadro 1: 5", por exemplo, faz alusão à citação/situação numerada com o algarismo 5 no Quadro 1 (página16). A sigla "Quadro 10: 1. a", por sua vez, faz referência à alínea a), do nível 1 – Visualização no Quadro 10 (página 91). "Quadro 11: 1R" diz respeito à alínea 1R do Quadro 11 (página 94; ver nota de rodapé da página 94).

Capítulo 5: Os casos

5.1. O caso de Teresa

Teresa, de 14 anos, é uma aluna com um nível de aproveitamento médio/baixo, semelhante à maioria da turma. No entanto, Teresa distingue-se de muitos dos seus colegas pelo facto de ser uma aluna extremamente responsável e desenvolver um trabalho regular tanto dentro como fora da sala de aula. Ainda que com algumas dificuldades importantes no que diz respeito ao raciocínio matemático, reconhecidas pela professora da turma e também por mim identificadas ao longo do ano letivo, a aluna participa em aula tanto em momentos de grande grupo – turma – como em pequeno grupo – pares – ou individualmente, assumindo sempre uma postura colaborativa.

5.1.1. A ficha diagnóstico

Primeira questão

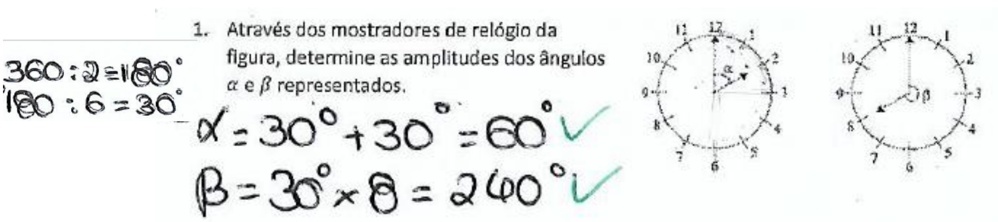


Figura 23: Resolução de Teresa da primeira questão da ficha diagnóstico.

Ao analisar a resposta de Teresa à primeira questão da ficha diagnóstico (Figura 23), percebe-se que, por similaridade visual (Quadro 10: 1. a), a aluna reconheceu que os mostradores, isto é, as circunferências podiam ser divididas no mesmo número de partes iguais. Sabendo a amplitude de um ângulo giro (360°), começou por dividir, no próprio desenho, o primeiro mostrador em duas partes e posteriormente subdividir uma das metades da circunferência em seis partes iguais, calculando assim a amplitude que corresponde a um intervalo de cinco minutos:

$$360 \div 2 = 180°$$

$$180 \div 6 = 30°$$

Denota-se que o raciocínio da aluna foi desenvolvido, em grande parte, sobre a imagem (Quadro 10: 2.d). Para além do reconhecimento de algumas propriedades físicas (partição dos mostradores em partes iguais), denoto que teve presente algumas propriedades matemáticas simples, no que diz respeito, por exemplo, à amplitude de um ângulo giro (Quadro 11: 1R).

Quinta questão

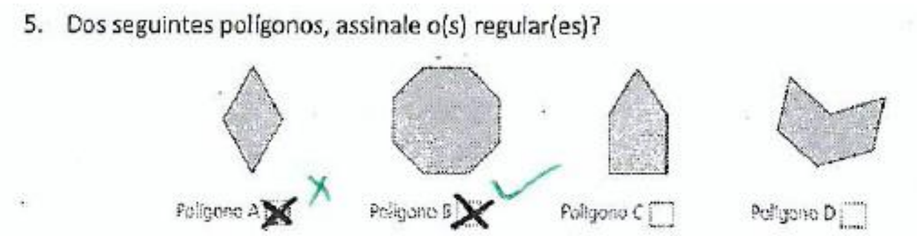


Figura 24: Resolução de Teresa da quinta questão da ficha diagnóstica.

Na quinta questão da ficha diagnóstico (Figura 24), a aluna recorre, em simultâneo ao aspeto visual dos polígonos e à definição de polígono regular, explicando: "Escolhi os polígonos que eram regulares… que têm os lados iguais... parecem iguais porque estão direitinhos. Mas um tem quatro lados e o outro tem oito". Por "parecem iguais", entende-se que a aluna faz alusão ao aspeto global dos polígonos, isto é, à aparência visual do polígono como um todo (Quadro 10: 1a). A expressão "porque estão direitinhos" pode indicar que a aluna está a fazer alusão à orientação dos mesmos (Quadro 1: 2). Está presente uma comparação entre os dois polígonos tanto na similaridade visual, em "parecem iguais" (Quadro 1: 1) como na distinção de algumas propriedades físicas, "um tem quatro lados e o outro tem oito" (Quadro 2: 1). Quanto ao domínio de conceitos, o uso de definições ("têm os lados iguais") está associado, segundo Díaz, Gutiérrez e Jaime (1998), a níveis iguais ou superiores ao segundo (Quadro 11: 2UD, 3UD, 4UD). No entanto, Teresa apenas comparou os lados do polígono, não tendo presente uma outra condição necessária para o mesmo ser regular: os ângulos internos serem geometricamente iguais. Assim, considerou que o facto de o polígono ter os lados geometricamente iguais era condição suficiente, e não necessária como acontece, para o polígono ser regular (Quadro 1: 5).

Sexta questão

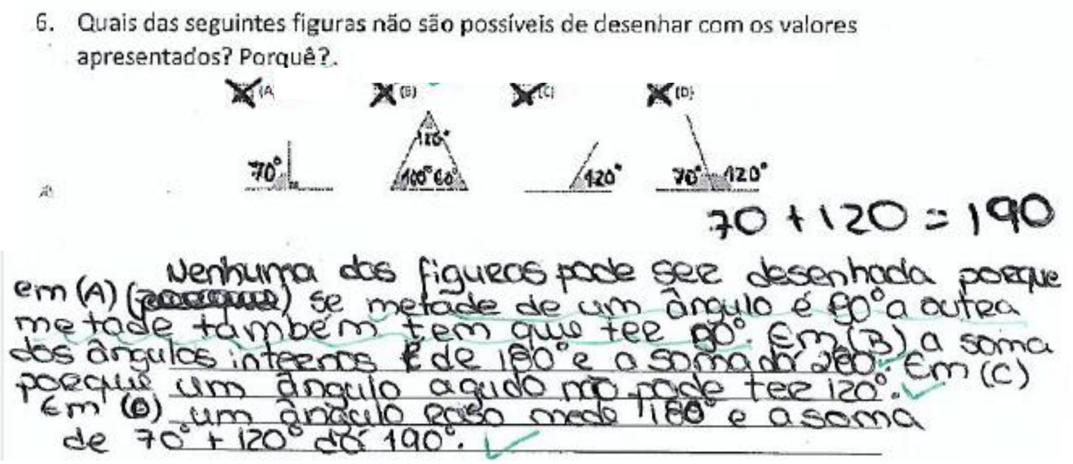


Figura 25: Resolução de Teresa da sexta questão da ficha diagnóstico.

Na questão seis da mesma ficha diagnóstico (Figura 25), a aluna reconhece e refere algumas propriedades matemáticas associadas a elementos das mesmas, baseando o seu raciocínio na interpretação visual que faz das figuras apresentadas. Na alínea A, ao admitir que as metades do ângulo representado medem 90°, Teresa mostra, implicitamente, o reconhecimento visual (Quadro 10: 1a) de um ângulo (raso) de amplitude igual a 180° (Quadro 11: 1R). Na alínea seguinte, a B, a aluna aponta para o facto de a soma dos ângulos internos [de um triângulo] ser 180° (Quadro 11: 1R) justificando, assim, que as medidas das amplitudes apresentadas não podem corresponder às dos ângulos internos de um triângulo. Quanto à alínea C, a aluna refere: “Professora, como este é agudo [aponta para o ângulo assinalado na figura] só podia ter menos de 90°, porque depois era obtuso. É isto?”.

O reconhecimento visual de um ângulo agudo (Quadro 10: 1a) e o conhecimento do intervalo em que deveria estar a sua amplitude (Quadro 11: 1R), leva a aluna a refutar a hipótese de a figura, da alínea C, estar corretamente desenhada. Das justificações apresentadas, a resposta à alínea D é a única que é acompanhada de um cálculo a partir do qual, reconhecendo visualmente (Quadro 10: 1a), mais uma vez, um ângulo raso e sabendo a amplitude correspondente (Quadro 11: 1R), Teresa conclui que também esta figura não pode ser representada com valores atribuídos aos ângulos assinalados. Chamo a atenção para o facto de, embora a aluna faça o uso correto dos argumentos a empregar na resposta, alguns conceitos ou expressões não estão totalmente corretas ou completas, como é o caso de "a soma dos ângulos internos é de 180°" (devendo ser "a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°").

Sétima questão

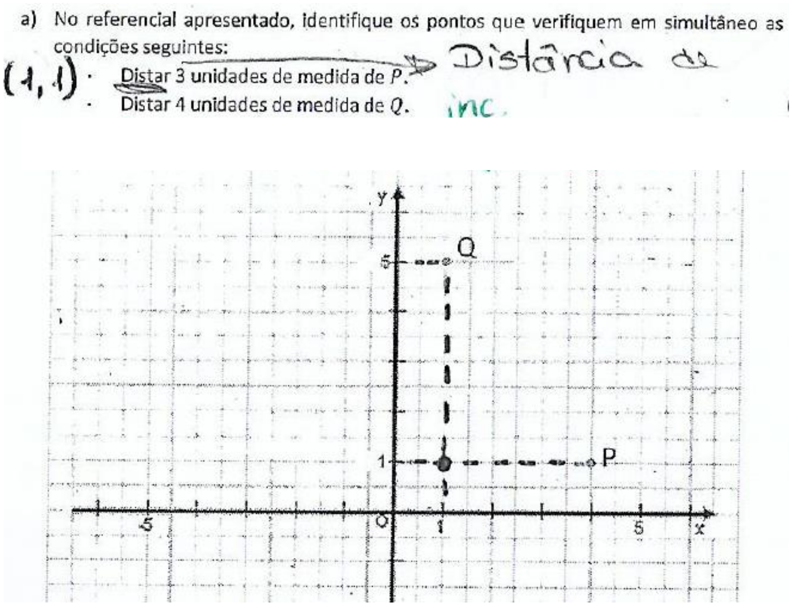


Figura 26: Resolução de Teresa da questão sete da ficha diagnóstico

Na sétima questão (Figura 26), Teresa identifica um ponto (de dois) que satisfaz as condições apresentadas, por um processo que acredito ser de cariz visual (Quadro 10: 1a). A aluna não reconhece a necessidade de traçar as duas circunferências que lhe permitem identificar o lugar geométrico dos pontos que respeitam ambas as condições. Ao contrário de alguns colegas da turma que fizeram algumas tentativas para descobrir outros pontos que distassem três unidades de P e quatro unidades de Q, Teresa aparenta não suspeitar da existência de outro ponto para além do que identificou. Sendo que anteriormente (na subunidade “lugares geométricos”) se referiu o motivo pelo qual se traçam “partes” de circunferências (ainda não denominadas arcos) para se construir a mediatriz de um segmento de reta, esta resolução de Teresa leva-me a concluir que para a aluna não é intuitiva a aplicabilidade da definição de circunferência, de modo a empregá-la em diferentes contextos ou situações. Para além da aplicabilidade, Teresa pode não ter aprendido efetivamente o conceito de circunferência reconhecendo apenas os seus atributos físicos (Quadro 11: 1R).

5.1.2. Questão 2 da página 82 do manual

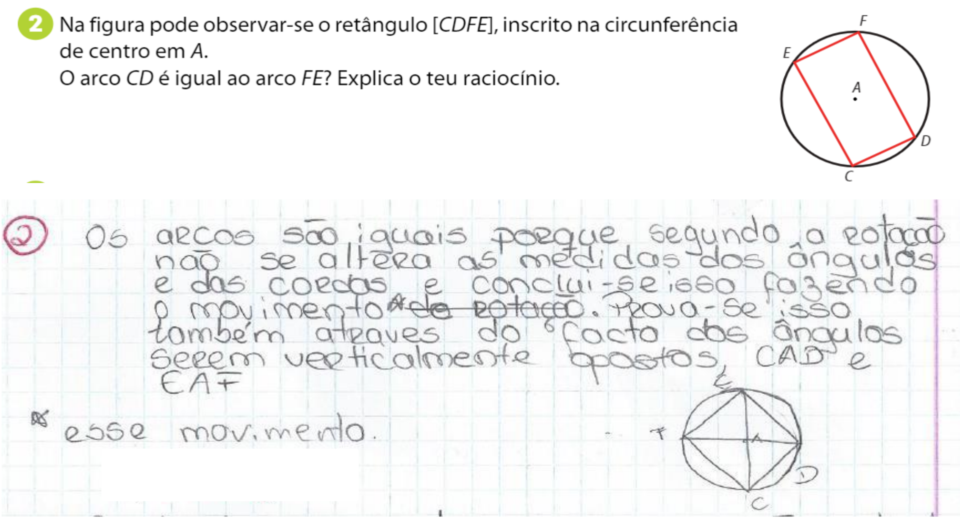


Figura 27: Enunciado do exercício 2 da página 82 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Teresa.

Na segunda aula, apresentando uma situação no círculo central de um campo de futebol durante um treino, levo os alunos a pensarem na relação que existirá entre dois arcos que correspondam a dois ângulos ao centro com a mesma amplitude, nesse mesmo círculo central. Para a turma, no geral, e para Teresa, em particular, foi óbvia a conclusão: “os arcos são iguais”. No entanto houve uma grande dificuldade em justificar a resposta dada. A propriedade “numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem arcos e cordas geometricamente iguais” foi então explicada através do movimento de rotação. Posteriormente a isto proponho à turma que realize o exercício apresentado na figura. Teresa, na sua resolução (Figura 27), não aplica a propriedade anteriormente demonstrada e faz antes referência ao movimento de rotação que justificaria informalmente a conclusão a que chega inicialmente "os arcos são iguais". O facto de construir uma demonstração, ainda que bastante informal, levar-me-ia a considerar que raciocinava no terceiro nível (Quadro 11: 3D). No entanto, dado que anteriormente se tinha feito uma demonstração com recurso à mesma transformação geométrica, esta resposta pode resultar de uma aplicação mecânica ou uma réplica da mesma. A forma como Teresa estrutura a resposta, na verdade, não justifica o facto de os arcos serem iguais. Assim, para que o movimento de rotação justifique o que se pretende, deve inicialmente referir-se um outro argumento de entre os dois seguintes:

a) EF e CD, por serem lados opostos de um retângulo, são geometricamente iguais;

b) CAD e EAF são ângulos verticalmente opostos, logo são geometricamente iguais.

Assim, ainda que por um processo visual a aluna tenha chegado a uma conclusão correta, a sua resposta carece de alguma argumentação importante. A aluna conhece os conceitos de arco, corda (Quadro 10: 1. B) e ângulos verticalmente opostos, no entanto denoto que existe alguma incompletude e/ou imprecisão na resposta apresentada: na frase "segundo a rotação não se altera as medidas dos ângulos e das cordas" falta, por exemplo, especificar qual a rotação, quais os ângulos e quais as cordas.

5.1.3. Questão 3.2 da página 82 do manual

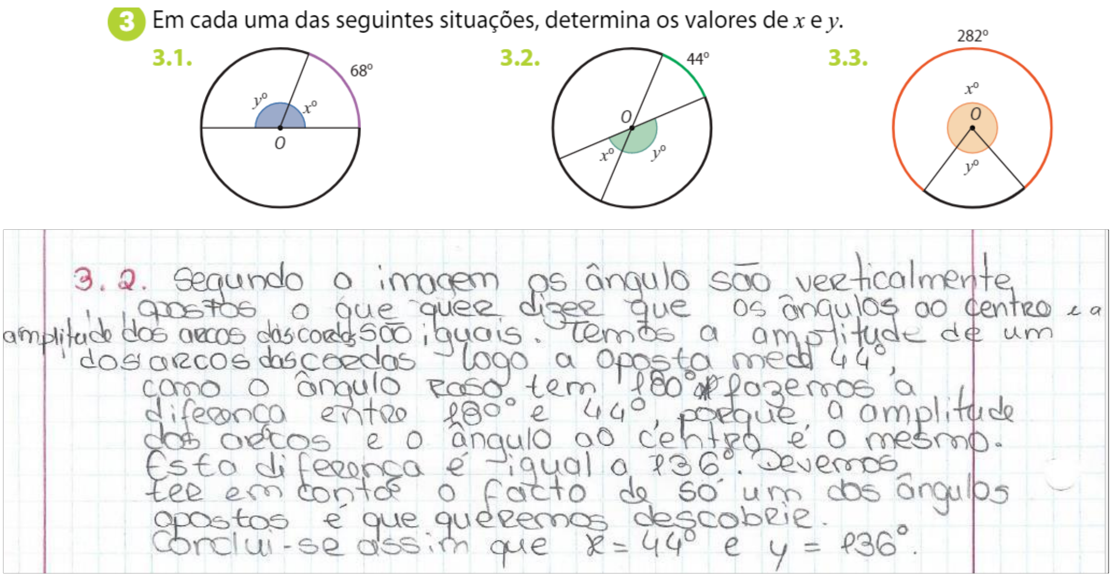
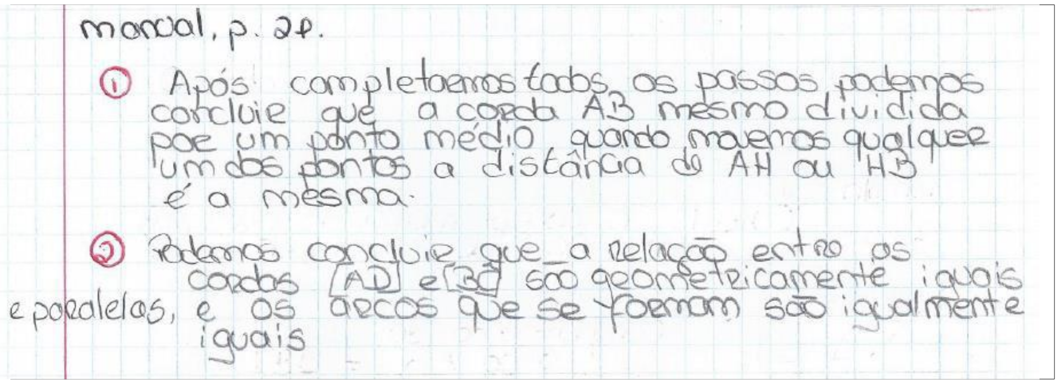


Figura 28: Enunciado do exercício 3 da página 82 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Teresa.

Na mesma aula, depois da discussão da questão apresentada anteriormente, os alunos resolveram a questão 3 da mesma página do manual. Das resoluções que Teresa apresentou para os exercícios propostos, selecionei a que a aluna se voluntariou para apresentar no quadro e explicar aos colegas (Figura 28). Começa por perceber, visualmente penso eu, que na figura estão representados dois ângulos verticalmente opostos (Quadro 10: 1. a). A aluna reconhece algumas propriedades matemáticas como a igualdade da amplitude de ângulos verticalmente opostos, a relação entre as amplitudes de ângulos suplementares e a relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e o arco compreendido entre os seus lados (Quadro 11: 1R), mostrando conhecimentos nos conceitos de ângulo ao centro e ângulos verticalmente opostos. No entanto, destaco a utilização de conceitos de forma não totalmente organizada e correta, com expressões como “arcos das cordas” e “a oposta mede”. Ainda assim, denoto alguma melhoria na estruturação das respostas e na interligação entre os conceitos mencionados em relação a outras apresentadas anteriormente. Depois de Teresa apresentar a sua resposta aos colegas, a turma sugeriu que ela assinalasse algumas letras na figura e as utilizasse na sua resposta de modo a simplificá-la ou tornar a sua leitura mais fluída. A aluna manifestou alguma dificuldade em reformular a sua resposta nesse sentido, sendo o papel dos colegas e da professora fundamental para que conseguisse concluir as alterações necessárias, nomeadamente a respeito da simbologia associada.

5.1.4. Tarefa “Investigando a circunferência”


manual, p. 28.

1 Após completarmos todos os passos podemos concluir que a corda AB mesmo dividida por um ponto médio quando movemos qualquer um dos pontos a distância de AH ou HB é a mesma.

2 Podemos concluir que a relação entre as cordas [AD] e [BC] são geometricamente iguais e paralelas, e os arcos que se formam são igualmente iguais

Figura 29: Resposta de Teresa às questões 1 e 2 da tarefa "Investigando a circunferência".

A realização da tarefa “Investigando a circunferência” (Anexo 8) durante a terceira aula, teve início com a manipulação no *Geogebra*. Esta manipulação, embora feita por mim, no meu computador, foi projetada para toda a turma e realizada segundo as sugestões dos alunos. Posteriormente a este passo, pedi aos alunos que, a pares, retirassem conclusões a partir do que visualizaram no *software*. Pretendia-se assim que os alunos reconhecessem duas propriedades apresentadas no subcapítulo “Conceitos matemáticos” e são elas:

· Qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda divide a corda e cada um dos arcos subtensos em duas partes geometricamente iguais.

· Arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, assim como as cordas correspondentes a esses arcos.

Teresa, num trabalho a pares, consegue retirar duas conclusões relevantes para o que se pretende demonstrar (Figura 29). As respostas apresentadas resultantes da análise de uma atividade essencialmente experimental e visual, apontam para a capacidade de a aluna se apropriar de uma manipulação geométrica para demonstrar empiricamente uma propriedade (Quadro 10: 2. D; Quadro 11: 2D).

Ainda assim, essas mesmas conclusões apresentam também algumas incoerências, nomeadamente quando a aluna refere que “a corda mesmo dividida por um ponto médio, quando movemos qualquer um dos pontos a distância de AH e HB é a mesma”. Pela resposta apresentada, o facto de ser a corda ser divida pelo ponto médio parece ser contrário ao facto de as distâncias de A a H e de H a B serem iguais, quando na realidade, um facto é consequência do outro. Deste modo, pode perceber-se que a aluna não reconhece uma propriedade matemática simples associada ao ponto médio de um segmento de reta (Quadro 11: Características dos processos matemáticos, segundo Díaz, Gutiérrez e Jaime (1998, p. 32).1R).

5.1.5. Questões 2.2 e 2.3 da página 90 do manual

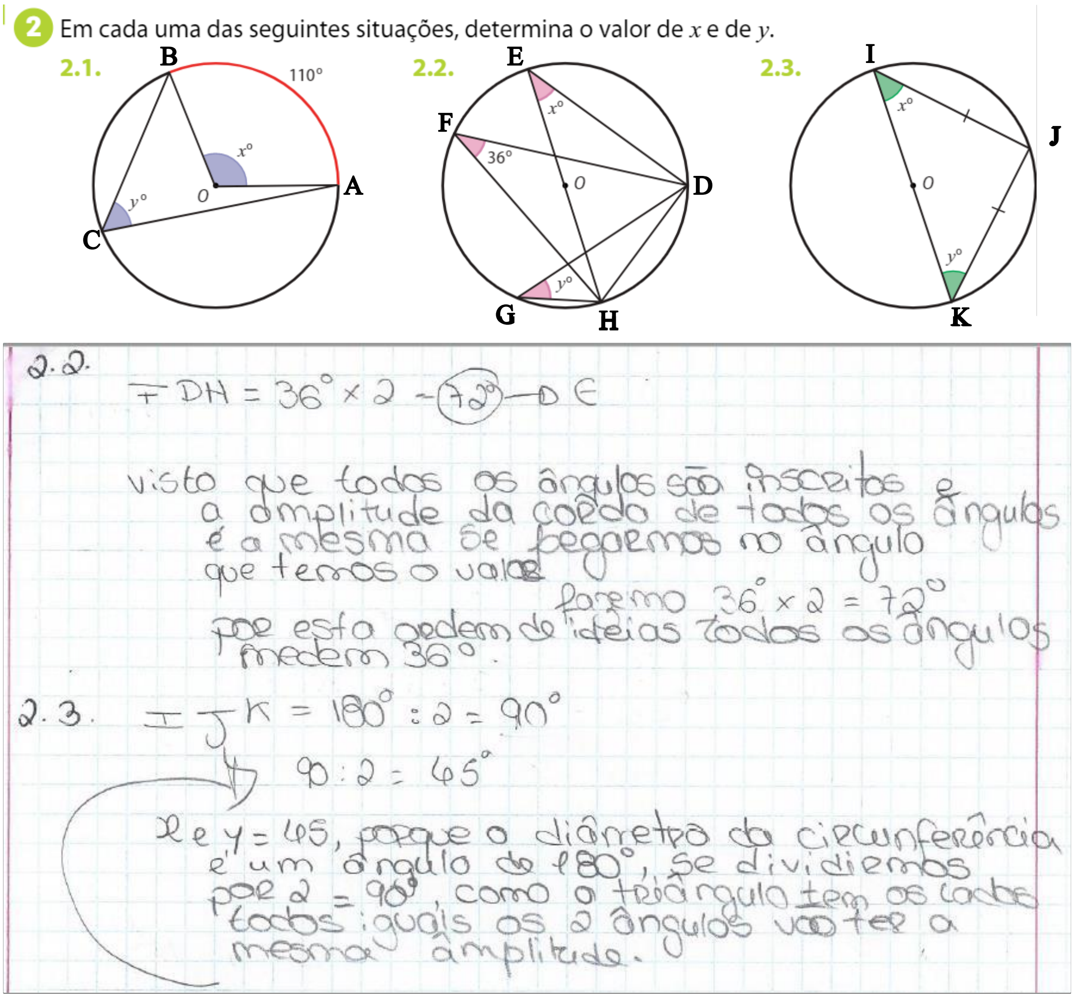


Figura 30: Enunciado do exercício 2 da página 90 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Teresa.

A questão apresentada na Figura 30 foi proposta à turma na quinta aula, após a lecionação dos tópicos comprimento de um arco de circunferência, área de um sector circular e ângulos inscritos. Com a alínea 2.2 do exercício apresentado na Figura 30 pretendia que os alunos aplicassem a propriedade anteriormente abordada em aula: “ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais”. No entanto, a aluna não usa esta propriedade para a resolução do exercício, optando por calcular a amplitude do arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito cuja amplitude é conhecida, reconhecendo posteriormente que os outros dois ângulos teriam a mesma amplitude. Embora não recorra à propriedade aprendida anteriormente, a aluna demonstra o reconhecimento visual de um ângulo inscrito, bem como o domínio no conceito de ângulo inscrito no cálculo da amplitude do arco compreendido entre os seus lados (Quadro 10: 2. e). Mais ainda, a aluna consegue generalizar o cálculo da amplitude de um ângulo ao outro, reconhecendo que "por esta ordem de ideias todos os ângulos medem $36°$". De forma análoga, a alínea 2.3 do exercício tinha em vista a aplicação da propriedade "ângulos inscritos numa semicircunferência são ângulos retos", de que a aluna não faz uso na sua resolução. As respostas de Teresa continuam a incluir expressões incorretas tais como "amplitude da corda" ou "o diâmetro da circunferência é um ângulo de $180°$". Para além disso, a aluna adota uma simbologia errada, escrevendo $FDH = 36°\times 2 = 72°$ quando na realidade pretende referir-se à amplitude do arco DH, isto é, DH. Pela análise apresentada, ambas as respostas apresentadas na Figura 30 se situam no nível 1 do raciocínio geométrico.

5.1.6. Classificar o ângulo inscrito como um ângulo excêntrico

Durante a lecionação desta subunidade, na oitava aula, tive oportunidade de aceder ao modo como os alunos da turma passavam ou faziam o processo de classificação. Pretendendo que os alunos classificassem os ângulos inscritos como ângulos excêntricos, desenvolvi um diálogo com a turma que os levasse a essa mesma conclusão. Nesse diálogo, Teresa é a única aluna da turma a realizar uma intervenção. Após a leitura do primeiro parágrafo da tarefa "Ângulos excêntricos" (Anexo 9), lanço uma questão à turma:

> Professora: Isto não vos causa aqui nenhuma dúvida?
> Alunos: Não.
> [os alunos fazem questões acerca da figura projetada no quadro destinada à realização da tarefa posterior]
> Professora: Reparem. A questão é: nós já aprendemos um outro ângulo cujo vértice não está no centro. Qual é?
> Alunos: Inscrito.
> Professora: Inscrito. Então mas eles agora estão a dizer: "os que não têm vértice no centro da circunferência chamam-se excêntricos"? Mas então afinal? Nós conhecemos um que não tem vértice no centro da circunferência e que designamos por ângulo inscrito…
> Teresa: Mas os excêntricos… uns podem estar espalhados ou na linha da circunferência.

Teresa, na realidade, ao estabelecer relação entre as propriedades em estudo dos ângulos inscritos e dos ângulos excêntricos (Quadro 10: 2b), consegue estabelecer uma conexão entre estes dois conceitos, no entanto hierarquiza-os de maneira contrária, isto é, considera que os ângulos excêntricos são ângulos inscritos, quando o oposto é que é verdadeiro.

A complexidade desta classificação e/ou hierarquização exige que o aluno, segundo o meu ponto de vista, consiga desenvolver um raciocínio no segundo nível, com um grau de aquisição bastante considerável (Quadro 11: 2C). Assim, segundo van Hiele, estou a "obrigar" a aluna a pensar num nível de raciocínio que não o seu, daí que sejam sentidas bastantes dificuldades por ela (ver primeiro parágrafo do subcapítulo "Existência de níveis", página 13).

5.1.7. Questão 2 da tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos"

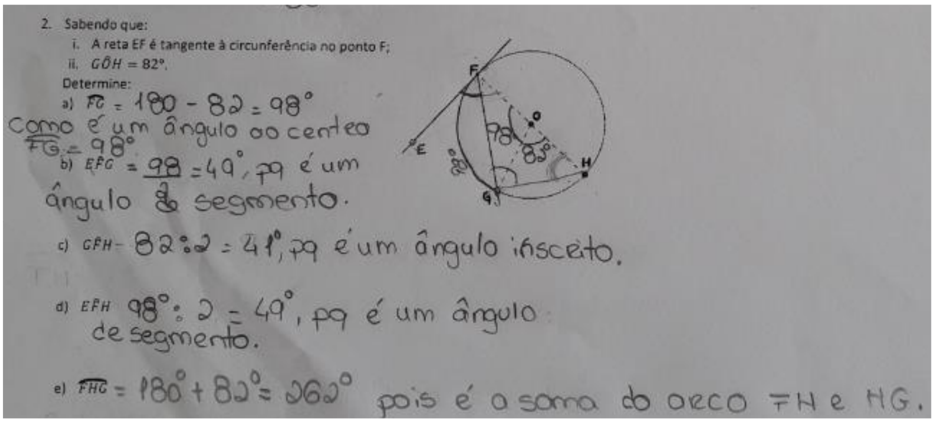


Figura 31: Enunciado e respetiva resposta de Teresa ao exercício 2 da tarefa "Ângulos de segmento e ex-inscritos".

Na resolução da tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos" (Anexo 10), durante a nona e décima aulas, a aluna apresenta uma melhoria significativa na escrita das suas respostas tanto a nível da simbologia como da construção frásica e uso dos conceitos apropriados. Ainda que se denote esta melhoria quanto à escrita das respostas, a aluna parece não dominar por completo a simbologia associada a esta subunidade quando, por exemplo, escreve "$FG = 180 - 82 = 98°$" (ver alínea a) da

Figura 31), quando na realidade se quer referir à amplitude do ângulo GOF e não do arco FG. Na alínea d), a aluna identificou incorretamente a amplitude do arco compreendido entre os lados do ângulo EFH (e explicitou-me essa distração quando lhe entreguei o *feedback* desta tarefa numa aula posterior). Sublinho que Teresa faz uma identificação correta de todos os ângulos exibidos na figura (ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo de segmento):

> Teresa: Este [referindo-se ao ângulo FOG] é um ângulo ao centro porque o vértice está no centro da circunferência.
>
> (…)
>
> Teresa: Aqui [referindo-se ao ângulo EFG] é um ângulo de segmento porque estas retas [apontando para as retas EF e GH] são perpendiculares… esta aqui [aponta para a reta EF] eles dizem que é tangente por isso é perpendicular.

Assim, o reconhecimento e a distinção entre os diferentes tipos de ângulos representados (Quadro 2: 2), pelo diálogo que estabeleci com a aluna em aula, são feitos tendo em conta algumas propriedades dos ângulos com base nas figuras que visualiza, nomeadamente a posição que o vértice do ângulo ocupa na circunferência (Quadro 10: 2a, 2d). Nesta resolução em particular destaca-se o facto de a aluna reconhecer o ângulo EFH (ver alínea d) como um ângulo de segmento que é, visualmente, bem distinto dos ângulos de segmento com que a turma se deparou até então (Quadro 2: 3). Pelo facto de calcular corretamente as amplitudes pedidas, pode dizer-se que a aluna domina os conceitos de ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo de segmento.

5.1.8. Tarefa “Ângulos internos de um polígono”

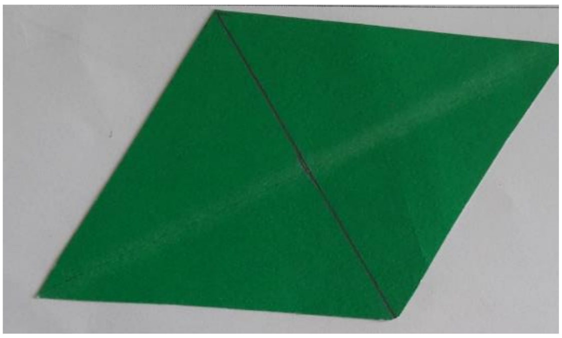


Figura 32: As duas diagonais traçadas pela aluna no losango.

Polígono	Nº de lados	Nº de triângulos	Soma dos ângulos internos do polígon (S_i)
losango	4	2	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
pentágono	5	3	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$
hexágono	6	4	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$
heptágono	7	5	$5 \times 180^\circ = 900^\circ$
octógono	8	6	$6 \times 180^\circ = 1080$
	n	$n-2$	$(n-2) \times 180^\circ$

Figura 33: O preenchimento da tabela de Teresa na tarefa "Ângulos internos e externos de um polígono".

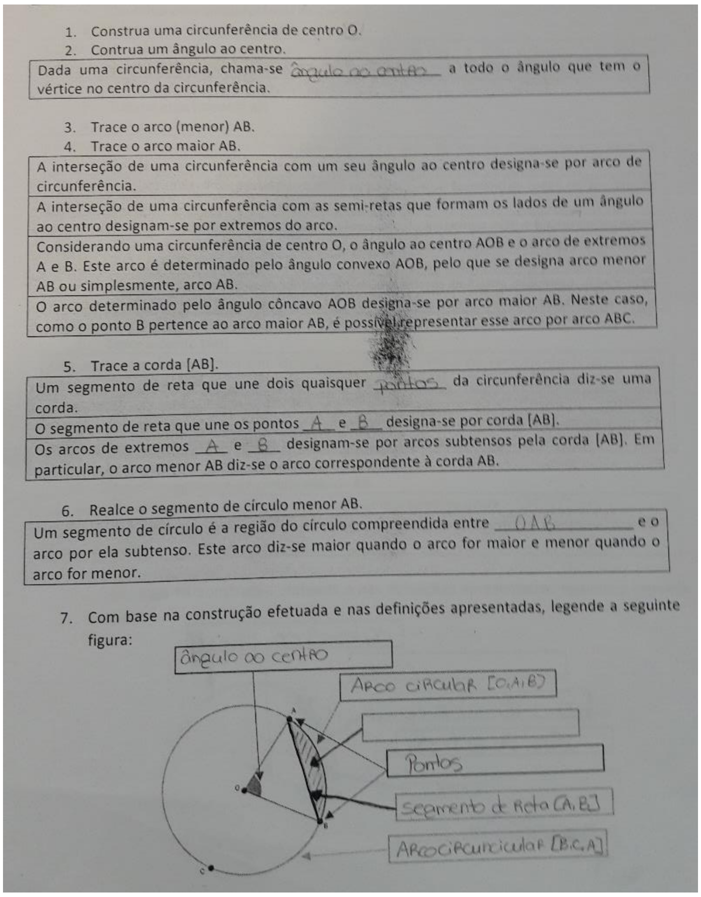
Na 11.ª aula, aquando da realização da tarefa “Ângulos internos de um polígono” (Anexo 11), Teresa cometeu um dos erros que estavam previstos no plano de aula, traçando todas as diagonais do polígono que lhe foi entregue, ainda que eu tivesse sublinhado o facto de que o que se pretendia era que os alunos fixassem um único vértice à sua escolha e que a partir dele traçassem as diagonais possíveis. Apagou então uma das diagonais (Figura 32) depois de eu ter feito uma advertência a toda a turma relativamente a esse erro e posteriormente a isso, a aluna não revela grandes dificuldades na execução do segundo passo da tarefa (contagem do número de triângulos em que o polígono foi divido e o preenchimento da linha da tabela que dizia respeito ao seu polígono).

No início da resolução da tarefa, distribui por todos os alunos da turma diferentes polígonos, assegurando-me de que em cada par não havia polígonos com o mesmo número de lados. No entanto, ao contrário de muitos outros colegas, Teresa não despertou para o facto de o seu par ter um polígono com um número de lados igual que lhe permitiria preencher mais uma linha da tabela para além da que dizia respeito ao seu polígono. Durante a discussão em turma dos resultados obtidos por cada aluno para a soma das amplitudes dos ângulos internos de cada polígono (passo três da tarefa), a aluna desempenhou um papel bastante ativo e rapidamente, a partir dos dados recolhidos pelos colegas, conseguiu preencher a quarta linha da tabela e, por fim, generalizar para um polígono com *n* lados (Figura 33). Este tipo de demonstração empírica assente na verificação experimental de uma verdade para a sua posterior generalização é característica dos alunos que raciocinam no segundo nível de van Hiele (Quadro 11: 2D).

5.2. O caso de Matilde

Matilde, de 14 anos, é uma aluna com um nível de aproveitamento médio, sendo uma das melhores alunas da turma. É uma aluna responsável e desenvolve um trabalho regular em sala de aula tendo algumas faltas nos trabalhos de casa. Matilde não revela dificuldades em esclarecer o seu raciocínio tanto em tarefas realizadas individualmente ou em díade, como também participa regularmente nos momentos de discussão em grande grupo - turma.

5.2.1. Tarefa “Arcos e cordas”



1. Construa uma circunferência de centro O.
2. Contrua um ângulo ao centro.

Dada uma circunferência, chama-se ângulo ao centro a todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

3. Trace o arco (menor) AB.
4. Trace o arco maior AB.

A interseção de uma circunferência com um seu ângulo ao centro designa-se por arco de circunferência.
A interseção de uma circunferência com as semi-retas que formam os lados de um ângulo ao centro designam-se por extremos do arco.
Considerando uma circunferência de centro O, o ângulo ao centro AOB e o arco de extremos A e B. Este arco é determinado pelo ângulo convexo AOB, pelo que se designa arco menor AB ou simplesmente, arco AB.
O arco determinado pelo ângulo côncavo AOB designa-se por arco maior AB. Neste caso, como o ponto B pertence ao arco maior AB, é possível representar esse arco por arco ABC.

5. Trace a corda [AB].

Um segmento de reta que une dois quaisquer pontos da circunferência diz-se uma corda.
O segmento de reta que une os pontos A e B designa-se por corda [AB].
Os arcos de extremos A e B designam-se por arcos subtensos pela corda [AB]. Em particular, o arco menor AB diz-se o arco correspondente à corda AB.

6. Realce o segmento de círculo menor AB.

Um segmento de círculo é a região do círculo compreendida entre OAB e o arco por ela subtenso. Este arco diz-se maior quando o arco for maior e menor quando o arco for menor.

7. Com base na construção efetuada e nas definições apresentadas, legende a seguinte figura:

Figura 34: Enunciado da tarefa “Arcos e cordas” e a respetiva resolução de Matilde.

A aluna não foi à escola na semana em que se deu início à lecionação desta subunidade e por esse motivo não realizou a ficha diagnóstico. Assim, o primeiro contacto de Matilde com os “ângulos e a circunferência” foi na aula do dia dois de março (ver subcapítulo 3.7.1. da descrição da intervenção letiva) onde os alunos, guiados por uma tarefa e um guião, realizaram uma construção geométrica no Geogebra.

A aluna acompanhou e realizou a construção geométrica sem dificuldades notórias. No entanto, como a própria admitiu, apenas deu atenção ao guião e só uma vez finda a construção geométrica se debruçou sobre o enunciado da tarefa. Pelas respostas da aluna às segunda e sétima questões percebe-se que conhece o conceito de ângulo ao centro, consegue fazer correspondê-lo à sua definição e identifica-o corretamente na legenda da figura. Já o conceito de arco, embora na legenda seja mencionado, não está completamente correto na medida em que a aluna utiliza a designação de “arco circular” quando se queria referir aos arcos maior ou menor. O conceito de corda também não é empregue na legenda da figura. Embora esteja correta a designação de segmento de reta, a aluna não se apropriou do novo conceito apresentado nesta subunidade mesmo depois de eu sublinhar, para toda a turma, que a legenda da figura deveria ser feita com os novos conceitos abordados na tarefa e não outros que conhecessem de anos anteriores. Assim, a resolução de Matilde da tarefa “Arcos e cordas” (Figura 34: Enunciado da tarefa “Arcos e cordas” e a respetiva resolução de Matilde. mostra que a aluna não domina todos os conceitos elementares desta subunidade (Quadro 10: 1. d) nem os reconhece/identifica na figura, consequência que advém do facto de não compreender as definições dos mesmos.

5.2.2. Tarefa de revisão da primeira aula

Na segunda aula (ver subcapítulo 3.7.2.), tendo em consideração a aula anterior na qual, ainda após a correção da legenda da Figura 35, os alunos revelaram dificuldade na aprendizagem das noções em causa, optei por voltar a distribuir pelos alunos a figura a legendar a cores e após a distribuição da tarefa iniciei de imediato a legenda em grande grupo. Aquando da legenda da Figura 35, em turma, a aluna consegue quase instantaneamente identificar alguns dos elementos assinalados, nomeadamente: “arco menor”, “arco maior” e “ângulo ao centro” (Quadro 10: 1. d), sendo que dois deles não tinham sido corretamente identificados na sua resposta à última questão da tarefa “Arcos e cordas” (ver subcapítulo 5.2.1.). Assim, a nível do domínio de conceitos, Matilde já conseguiu reconhecer os elementos ditos básicos nesta subunidade. Já os conceitos de “extremos de um arco” (Quadro 10: 2. e), “arco subtenso” e “segmento de círculo” (Quadro 10: 3. d) ainda não foram identificados pela aluna e, nesse sentido, quanto à estruturação espacial, a aluna demonstra alguma dificuldade em reconhecer alguns constituintes da figura mesmo quando esta se encontra numa posição exatamente igual àquela que fora apresentada na aula anterior na aula anterior (Quadro 1: 2).

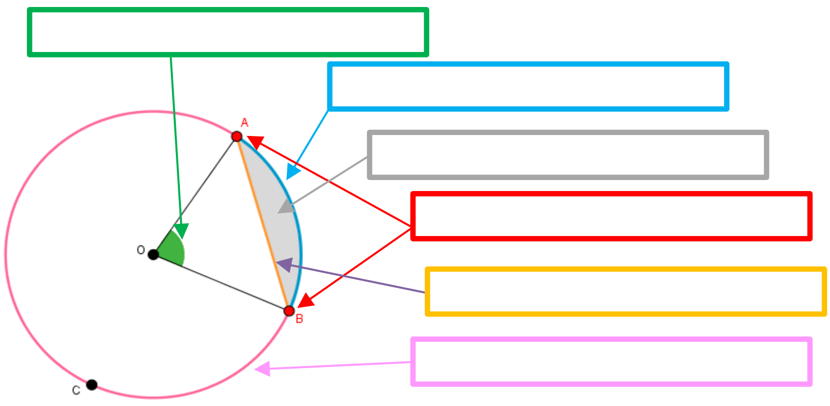
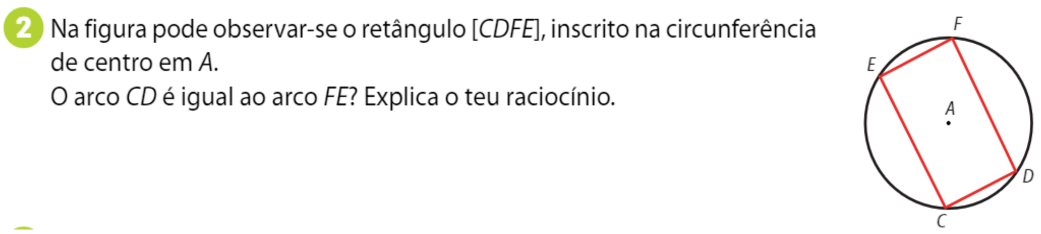
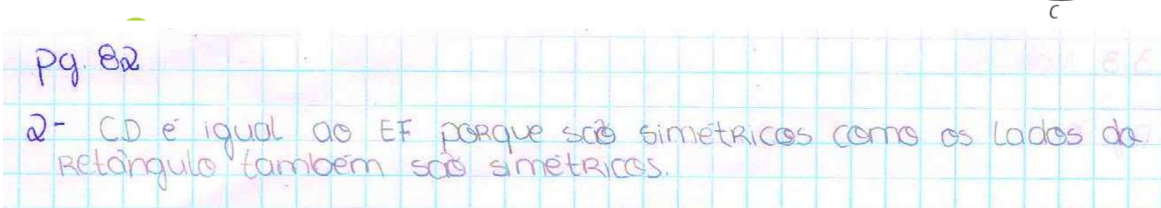


Figura 35: Tarefa de revisão da primeira aula.

5.2.3. Questão 2 da página 82 do manual[13]



2 Na figura pode observar-se o retângulo [*CDFE*], inscrito na circunferência de centro em *A*.
O arco *CD* é igual ao arco *FE*? Explica o teu raciocínio.



Pg. 82
2- CD é igual ao EF porque são simétricos como os lados do Retângulo também são simétricos.

Figura 36: Enunciado do exercício 2 da página 82 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Matilde.

Também na segunda aula, após a demonstração visual da propriedade “numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem arcos e cordas geometricamente iguais” proponho aos alunos da turma que realizem o exercício apresentado na figura 36. Matilde, perante o enunciado do exercício,

[13] A contextualização deste exercício no momento da aula pode ser vista no caso Teresa (subcapítulo 5.1.2) ou na descrição da intervenção letiva (subcapítulo 3.7.2.).

responde de imediato à questão, no entanto manifesta bastantes dificuldades na justificação da resposta:

> Matilde: Professora, como é que justifico que eles são iguais?
> Professora: Já sabes que são iguais? Como é que tens a certeza?
> Matilde: Eu acho que é óbvio. Quando olhamos vemos logo que são iguais. Têm a mesma amplitude… medem o mesmo… sei lá. Quando olhamos, percebemos que têm o mesmo comprimento.
> Professora: Será que o retângulo que está desenhado te ajuda a justificar a resposta?
> Matilde: Hm… Não sei. Como é que dá? Tenho estes dois lados (aponta para os segmentos reta [EF] e [CD]) do retângulo que são iguais aos arcos. (Pausa) Ah! Pois. Faz sentido, os lados e os arcos são iguais.
> Professora: Repara no que disseste: os dois lados são iguais aos arcos. Vê se faz sentido. Um arco é igual a um lado que é um segmento de reta…?
> Matilde: Sim. Pronto. Não são iguais na forma mas medem o mesmo. É por isso que os arcos são iguais. Ou então não percebo.

Pelo diálogo apresentado anteriormente, percebe-se que Matilde assenta a sua resposta no aspeto visual. Expressões como "Quando olhamos vemos logo que são iguais" ou "Quando olhamos, percebemos que têm o mesmo comprimento" (Quadro 1: 1; Quadro 1: 6) constituem um raciocínio baseado na aparência global da figura ou por comparação de alguns elementos presentes na mesma. Relativamente aos conceitos de arco e lado de um polígono (Quadro 10: 1. d), embora pareça que os reconhece na figura, percebe-se que não os domina, não reconhecendo algumas das suas propriedades geométricas quando considera que um arco e um lado do retângulo podem ser iguais.

Ao longo do diálogo e na resposta escrita (Figura 36: Enunciado do exercício 2 da página 82 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Matilde.), a aluna não faz qualquer menção à propriedade matemática anteriormente demonstrada (Quadro 11: 2R). No entanto, na sua resposta, Matilde faz referência à simetria como transformação que justifica o facto de os arcos e os lados do polígono serem iguais. Processo esse de caráter totalmente visual uma vez que a forma como Matilde estrutura a resposta na verdade não justifica o facto de os arcos serem iguais, uma vez que para tal teria que ser referida a existência de um eixo de simetria da figura. Assim, ainda que por um processo visual a aluna tenha chegado a uma conclusão correta, a sua resposta carece de alguma argumentação importante, características predominantes no primeiro nível de pensamento geométrico.

5.2.4. Questão 3 da página 82 do manual

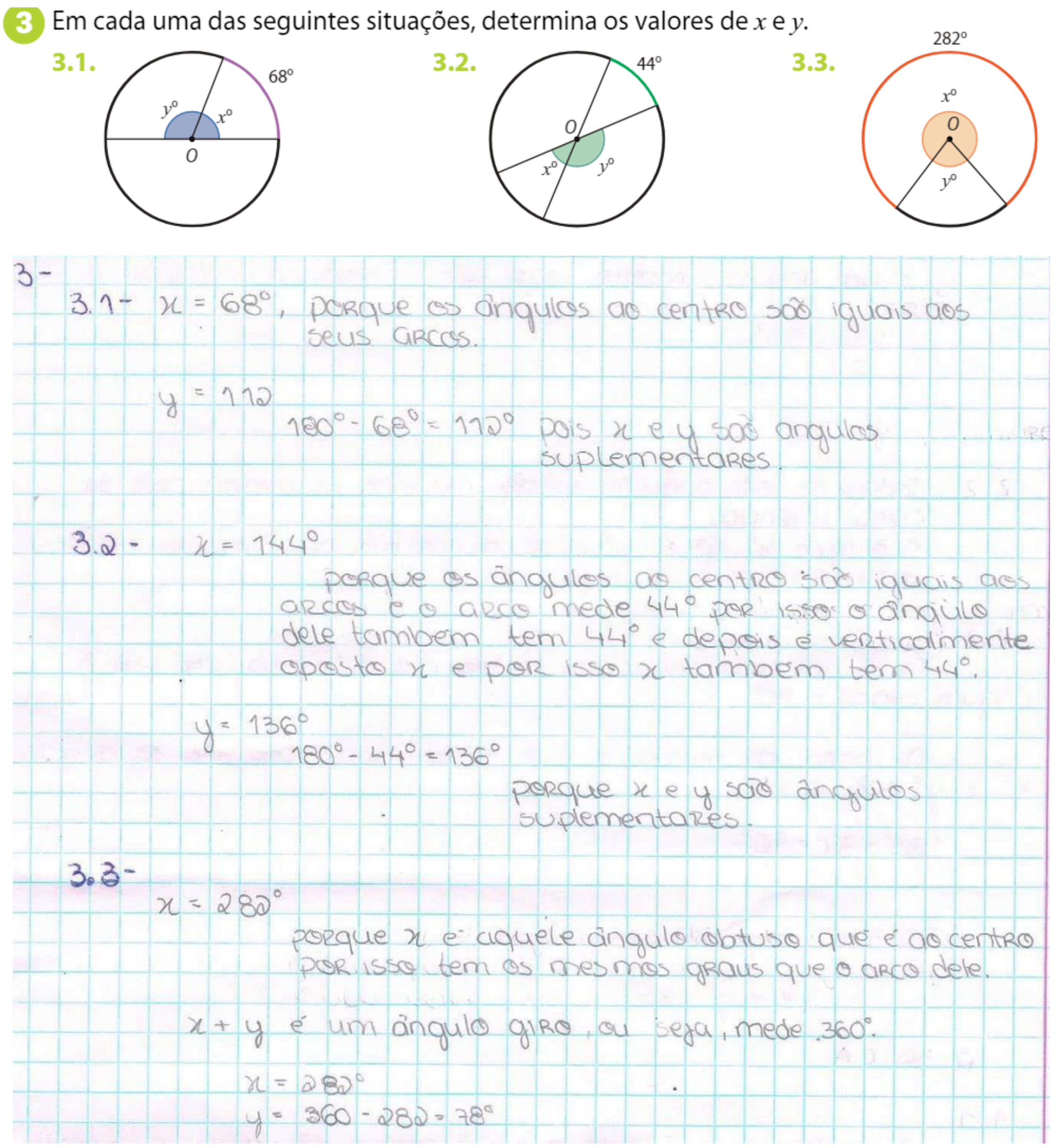


Figura 37: Enunciado do exercício 3 da página 82 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Teresa.

Ainda na segunda aula, depois da discussão da questão apresentada anteriormente, os alunos resolveram a questão 3 da mesma página do manual. A resposta de Matilde (Figura 37) evidencia que esta reconhece algumas propriedades simples (Quadro 11: 1R) já apreendidas em anos anteriores, tais como a relação entre as amplitudes de dois ângulos suplementares (respostas às questões 3.1 e 3.2) e entre ângulos verticalmente opostos (resposta à questão 3.2). Analisando a resposta à questão 3.1, fica claro que a aluna reconhece a relação existente entre a amplitude de um ângulo ao centro e a do seu arco correspondente (Quadro 11: 1R). Na questão 3.2, embora a aluna escreva “$x = 144°$", verifico que se trata apenas de um lapso pois toda a resposta, e a conclusão da mesma em particular, vai ao encontro do valor correto. Muitos dos alunos da turma, na questão 3.3, não conseguem reconhecer que o ângulo x é um ângulo ao centro provavelmente por ter uma amplitude superior a $180°$ (Quadro 1: 2; Quadro 10: 1. a). Matilde, por sua vez, “ultrapassa” essa aparência global dos ângulos ao centro apresentados até então, classificando o ângulo x como um ângulo ao centro e estabelecendo a relação correta entre a sua amplitude e a do seu arco correspondente (Quadro 2: 3; Quadro 10: 2. b), mostrando assim domínio no conceito de ângulo ao centro.

De notar alguma incorreção na escrita da aluna em expressões como “os ângulos ao centro são iguais aos seus arcos” (resposta às questões 3.1 e 3.2) ou “tem os mesmos graus que o arco dele” (resposta à questão 3.3). Estas mesmas expressões erróneas resultam do facto de a aluna não utilizar a designação de “arco correspondente” (Quadro 10: 2. e). Na resposta à questão 3.3 aponto também para o facto de a aluna ter empregado o termo “obtuso” para um ângulo que, na realidade, é côncavo. Tendo eu apontado a última alínea para os alunos resolverem em casa devido à falta de tempo para a realizar em aula, Matilde dirige-se a mim no final da aula para conferir se a resposta que construiu a essa mesma alínea estava correta. Analisando a mesma, fiz logo referência a este erro:

> Professora: Por que é que diz que este ângulo é obtuso?
> Matilde: Porque mede mais de 180.
> Professora: Então e este ângulo [desenho um ângulo obtuso]… que nome lhe dá?
> Matilde: Também é obtuso.
> Professora: Mas este mede mais de 180º?
> Matilde: Não. Mede menos.
> Professora: Então os ângulos obtusos são aqueles que medem mais de 180º?
> Matilde: Não. São os que medem mais de 90.
> Professora: Todos os que medem mais 90º?
> Matilde: Sim. Não? Não estou a perceber. Foi assim que aprendemos sempre… os que forem mais de 90 são obtusos.
> Prfessora: Sim. Percebo o que está a dizer. Mas falta aí referir que medem menos de 180º, senão são côncavos.
> Matilde: Ahh.

Ainda que a distinção entre ângulos côncavos e convexos não seja preponderante no estudo desta subunidade, a transcrição deste diálogo serve para fazer referência a uma definição mal construída, em anos anteriores, de um conceito que, à partida, é elementar. Definição essa que resultou do reconhecimento de uma condição necessária como suficiente (Quadro 1: 5), isto é, para a aluna, basta que o ângulo meça mais de 90º de amplitude para ser um ângulo obtuso, quando na realidade é necessário também que meça menos de 180º para o ser.

De modo geral, as respostas dadas a estas três alíneas revelam que a aluna tem um pensamento bem estruturado na medida em que recorre a três aspetos essenciais para a completude das suas respostas: identifica os elementos constituintes das figuras (Quadro 11: 1R), conhece as designações/definições (Quadro 11: 2UD) e aplica as propriedades que lhes estão associadas (Quadro 11: 2R). Além do mais, a aluna demonstra clareza na forma como estrutura as suas ideias, selecionando a informação necessária (não excedente) na explicitação do seu raciocínio.

5.2.5. Questão 2 da página 90 do manual

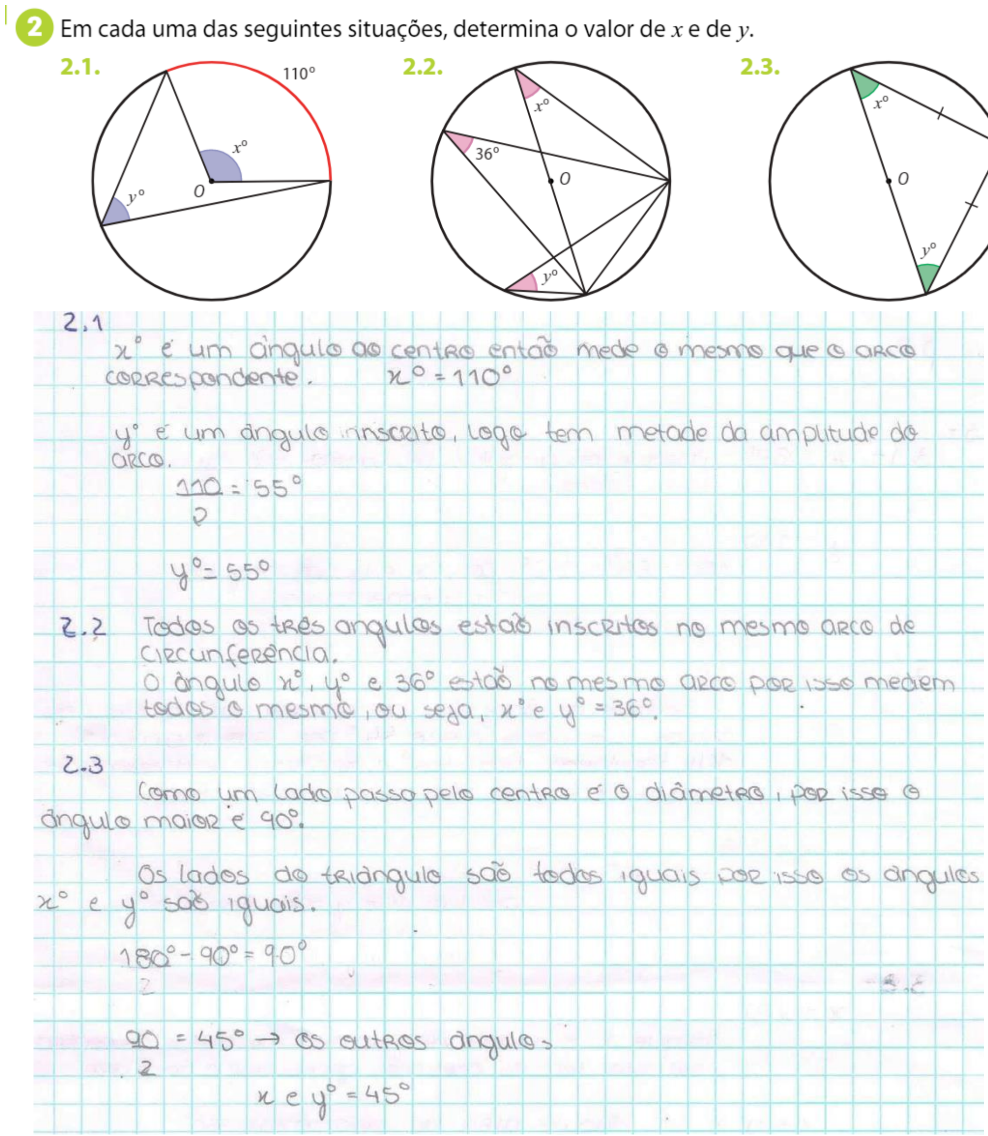


Figura 38: Enunciado do exercício 2 da página 90 do segundo volume do manual adotado e a respetiva resolução de Matilde.

A questão apresentada na Figura 38 foi proposta à turma na quinta aula, após a lecionação dos tópicos “comprimento de um arco de circunferência”, “área de um sector circular” e “ângulos inscritos”. Na alínea 2.1, Matilde identifica corretamente o ângulo ao centro e o ângulo inscrito representados na figura, estabelecendo as relações entre a amplitude de cada um desses ângulos e os arcos compreendidos entre os seus lados (Quadro 11: 1R). Na mesma alínea, sublinho o facto de a aluna fazer uso do termo “arco correspondente” (Quadro 10: 2. e), termo esse pouco utilizado pelos restantes colegas da turma. Também pelo emprego correto desta designação é possível verificar uma evolução da aluna em comparação com a questão analisada anteriormente (ver subcapítulo 5.2.4).

Com a alínea 2.2 do exercício apresentado pretendia que os alunos aplicassem a propriedade anteriormente abordada em aula: “ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais”. Matilde consegue fazê-lo corretamente (Quadro 11: 2R) e começando por salientar a condição que é o “ponto de partida” dessa mesma propriedade (Quadro 3: 1), aplicando-a, posteriormente, à situação concreta que está ilustrada na figura. Esta sua afirmação inicial revela que para além de conseguir reconhecer, ainda que visualmente, uma definição (“os ângulos estão inscritos no mesmo arco de circunferência”), sabe que ela é condição necessária para outra (“por isso medem todos o mesmo”). Este tipo de raciocínio pode ser equiparado ao terceiro nível de pensamento, no qual os alunos conseguem construir argumentações lógicas e simples, recorrendo a propriedades ou definições que dominem e reconhecendo que umas propriedades se podem deduzir de outras.

De forma análoga, a alínea 2.3 do exercício tinha em vista a aplicação da propriedade “ângulos inscritos numa semicircunferência são ângulos retos”, a qual, embora não seja assim descrita por Matilde, está subjacente ao raciocínio estabelecido. Isto é, embora a aluna não refira que o ângulo está inscrito numa semicircunferência e por isso é um ângulo reto, identifica corretamente um diâmetro da circunferência e a partir daí conclui que o ângulo mede 90° (Quadro 11: 2R). Na mesma alínea, a aluna incorre numa incoerência quando refere que “os lados do triângulo são todos iguais”, revelando que pode não estar consciente da diferença que existe obrigatoriamente entre a medida das duas cordas assinaladas na circunferência e a do diâmetro da mesma, isto é, o diâmetro tem sempre uma medida superior a qualquer outra corda (que não passe no centro). Uma vez mais, ainda que não refira a propriedade subjacente ao seu raciocínio, Matilde mostra saber que “num triângulo (isósceles), a lados iguais, opõem-se ângulos iguais” (Quadro 11: 2R).

Capítulo 6: Conclusão

6.1. Síntese do estudo

Este trabalho, enquanto relatório da prática supervisionada integrado no Mestrado em Ensino de Matemática, partiu da lecionação da subunidade “Ângulos e circunferência” numa turma de 9.º ano da Escola Secundária de Caneças, no final do 2.º período letivo (do ano 2016/2017). O ensino desta subunidade integrou a lecionação de 15 aulas, cinco delas com a duração de 45 minutos cada e as restantes 10 com a duração de 90 minutos cada.

O objetivo que serviu de mote a este estudo estava assente na análise do raciocínio geométrico dos alunos no estudo da circunferência. Nesse sentido, formulei duas questões que orientassem a minha investigação:

· Como se caracteriza o raciocínio geométrico dos alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?

· Que dificuldades manifestam os alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?

O enquadramento curricular e didático do meu estudo teve por base os documentos curriculares e os resultados de investigações na área da didática da geometria e análise do raciocínio geométrico. Resultados esses que me remeteram para os estudos realizados pelos professores Dina e Pierre van Hiele. O trabalho deste casal holandês constituiu também uma ferramenta para a minha análise dos dados recolhidos.

Indo ao encontro do objetivo principal e das questões deste estudo, procurei seguir uma metodologia apoiada em tarefas que variaram entre exercícios, problemas e simples explorações, seguindo um espírito de questionamento com recurso ao senso comum e à intuição. Neste sentido apelativo à intuição, contextualizei algumas aprendizagens numa situação da realidade: o futebol.

Num paradigma interpretativo e qualitativo e através de estudos de caso, procurei compreender alguns processos de aprendizagens de alguns alunos com vista à caracterização do seu raciocínio geométrico. A recolha de dados foi feita por observação direta, no ambiente natural a que os alunos estão habituados – a sala de aula. Os dados recolhidos incluíram os documentos produzidos pelos mesmos durante as atividades resultantes das tarefas: resoluções escritas das tarefas, os ficheiros Geogebra, as resoluções do teste escrito e o portefólio da disciplina.

De todos os dados recolhidos, escolhi os que seriam mais frutíferos para este estudo com o propósito de responder às questões do mesmo. Assim, apresentei algumas das resoluções dos alunos seguidas da minha análise com base, tal como já referido anteriormente, em estudos precedentes nomeadamente os de Dina e Pierre van Hiele. A interpretação e estudo dessas mesmas resoluções levam-me a retirar algumas conclusões que apresento neste capítulo também como resposta às duas questões de estudo.

6.2. Principais conclusões

Neste subcapítulo apresento as principais conclusões retiradas deste estudo como resposta a cada uma das questões do mesmo.

Como se caracteriza o raciocínio geométrico dos alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?

Fazendo uma abordagem geral ao raciocínio geométrico dos casos que estudei em particular, o primeiro aspeto a ressalvar é o apoio que o mesmo tem na visualização. Aliás, através da videogravação das aulas, foi-me possível constatar que esta particularidade se verificou na totalidade dos alunos desta turma. De facto, este era já um resultado espectável. Tal como refere Jaime e Gutiérrez (1990), embora o primeiro nível – a visualização – corresponda, ao nível mais elementar do pensamento geométrico (ter presente o caso Teresa), na realidade, qualquer estudante em qualquer nível, quando se confronta com algum conceito geométrico novo, tende a passar pelo primeiro nível (ter presente o caso Matilde). Também na minha lecionação foi-me possível verificar algo defendido por Loureiro (2009): para além do facto de os alunos terem uma predisposição para o processo de visualização, a Geometria é em si um meio bastante propício ao desenvolvimento dessa capacidade.

No capítulo 2.1.2, fazendo referência a Battista (2007), aludi ao facto de parte do pensamento geométrico ser baseada no raciocínio espacial: a capacidade de observar, interpretar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. Ao longo da minha prática, percebi que os alunos foram ganhando mais destreza neste sentido. Facto este que se torna mais claro quando, fazendo uma comparação entre as resoluções das primeiras e as das últimas tarefas, se denota uma evolução nessas capacidades. As alunas começam a fazer o reconhecimento de propriedades matemáticas (Quadro 11: 2R) que vão para além dos atributos físicos (Quadro 11: 1R).

O processo de generalização, embora não esteja presente nos quadros de análise, está relacionado com a demonstração empírica (Quadro 11: 2D). Este tipo de demonstração assenta na verificação experimental de uma verdade que é posteriormente verificada na sua generalidade. A resolução de Teresa a duas das tarefas propostas (nos subcapítulos 5.1.5 e 5.1.8) coloca em destaque a facilidade com que a aluna, à semelhança dos restantes colegas da turma, realiza o processo de generalização quando embora não se recordasse da propriedade aprendida anteriormente, reconhece que "por esta ordem de ideias todos os ângulos medem 36°". Esta generalização, claramente feita por analogia, característica dos alunos que raciocinam no segundo nível de van Hiele, esteve presente de forma natural nos raciocínios estabelecidos por alunos com as mais variadas aprendizagens (provavelmente em diferentes níveis do pensamento geométrico).

Quanto ao domínio de conceitos, é possível verificar-se alguma evolução na apropriação que as duas alunas fazem dos novos conceitos apreendidos ao longo desta subunidade. O reconhecimento dos objetos em estudo evolui de um processo meramente visual para o recurso a definições, facto notório tanto no caso de Teresa (subcapítulo 5.1.7.: a aluna clarifica o motivo pelo qual um determinado ângulo representado é ao centro e um outro é de segmento) como no caso de Matilde (subcapítulo 5.2.4: a aluna consegue reconhecer um ângulo ao centro com uma amplitude e aparência bem diferentes dos que lhe tinham sido apresentados até então).

Associado ao domínio de conceitos, para além do reconhecimento e/ou identificação de objetos geométricos, está o conhecimento das propriedades referentes a esses mesmos objetos e aos seus conceitos. São exemplos dessas propriedades: a relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e a do seu arco correspondente, a amplitude de um ângulo inscrito numa semicircunferência e a relação entre as amplitudes de ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência. Importa ressalvar que nalgumas situações, embora as alunas não escrevam as propriedades de uma forma totalmente correta, não implica o não reconhecimento das mesmas. Na realidade, pelas interações que registei em aula, a maioria dos alunos que reconhece as propriedades em causa, acaba por não as registar.

Que dificuldades manifestam os alunos no que diz respeito à estruturação espacial e ao domínio de conceitos geométricos neste tópico?

Começo por mencionar aqui o aspeto que referi no início da resposta anterior, mas agora enquanto dificuldade: o apoio do raciocínio geométrico na visualização. E o que pretendo destacar aqui é o recurso recorrente que os alunos fazem a este processo que várias vezes os leva a cometer erros ou a não conseguir justificar as suas respostas. Teresa e Matilde, na resolução de uma mesma tarefa (subcapítulos 5.1.2 e 5.2.3), revelam dificuldade em justificar o facto de dois arcos serem iguais com recurso às propriedades aprendidas anteriormente, uma vez que para ambas, visualmente é algo dado como certo. Matilde, embora apresente características dos segundo e terceiro níveis de pensamento geométrico, cai na mesma "armadilha" que Teresa, quando na resolução de uma outra tarefa (subcapítulos 5.1.5 e 5.2.5) afirma que os lados de um triângulo são todos iguais quando o triângulo e causa é isósceles.

O processo de classificação é, segundo o meu ponto-de-vista, o mais difícil de realizar por parte dos alunos. Teresa, a única aluna que participou no momento de uma aula destinado à análise desse processo (subcapítulo 5.1.6), estabelece a hierarquização contrária. Isto é, ao invés de reconhecer todo o ângulo inscrito é um ângulo excêntrico, aproxima-se antes de um sistema conceptual segundo o qual todo o ângulo excêntrico é um ângulo inscrito.

A nível do domínio de conceitos, embora as alunas revelem uma evolução importante na identificação e uso de conceitos, a forma como articulam os mesmos carece de alguma coerência frásica, apresentando erros a nível da linguagem científica. Para além de os alunos, no geral, manifestarem estas dificuldades relativamente a conceitos aprendidos ou abordados recentemente, Matilde, em particular, apresenta dificuldade em aceitar e atender definições que refutem propriedades e/ou uma nomenclatura que apreendeu de forma errada em anos anteriores.

6.3. Reflexão final

A teoria de Van Hiele tem sido grandemente discutida e questionada devido à sua natureza e ao facto de se restringir às figuras no plano (Battista, 2007). Matos (1999) refere que esta teoria não contempla especificamente áreas como a orientação espacial e representação, a medida, a Trigonometria, ou a Geometria analítica, abordagens contemporâneas importantes à Geometria. Também o facto de se considerar o aluno como pertencente a um grupo homogéneo, enquadrado num único nível, não permite a ponderação de diferenças individuais. Adicionalmente, ao assumirem-se os níveis como unidades discretas, não existe a previsão da oscilação entre níveis do raciocínio de um aluno que esteja no processo de passagem de um nível para outro, nem a consideração do ponto de partida dos estudantes em diferentes níveis para diferentes conceitos.

Mayberry (1983) refere a existência de muitos estudos empíricos indicativos de que os indivíduos demonstram comportamentos diversificados em diferentes temas da Geometria. Apoiados por este aspeto, Clements e Battista (2001, citados em Battista (2007) apresentam os níveis de Van Hiele como níveis contínuos e aplicáveis a diferentes domínios da Geometria ao invés de estágios discretos e globalizantes. Alguns estudos têm procurado adaptar os níveis de Van Hiele para além das figuras no plano, estendo-os às figuras 3D e transformações geométricas (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991) ou procurando compreender os modelos cognitivos para o conceito de ângulo (Matos, 1999).

Tendo em conta as considerações suprarreferidas, considero que seja importante haver mais investigação nesta área que através dos resultados de van Hiele, estabeleça relações e padrões de análise que criteriosamente permitam a análise do raciocínio geométrico dos alunos que englobe as suas várias componentes: estruturação espacial, domínio de conceitos e linguagem simbólica. Investigação essa que tenha em consideração a possibilidade de variação entre os níveis raciocínio, vendo os mesmos como variáveis contínuas e abranja os vários temas abordados nas unidades de Geometria dos diferentes anos escolares.

Enquanto futura professora, considero que a prática letiva foi bastante enriquecedora na medida em que me clarificou a necessidade de uma planificação das aulas bem estruturada que me permita uma boa melhor gestão do tempo de aula e bem preparada para as diferentes participações que dos alunos possam advir. As tarefas, por sua vez, devem ser construídas ou selecionadas tendo em conta a caracterização do nível de pensamento dos alunos e os objetivos que se pretendem alcançar em determinado conteúdo. Para uma boa caracterização do nível de pensamento geométrico dos alunos, devo fazer um acompanhamento frequente e continuado dos seus processos de raciocínio, insistindo num questionamento "quase" exaustivo que os ajude a clarificar a sua forma de pensar. A contextualização da unidade didática na situação da realidade foi um desafio interessante, embora reconheça que deveria ter sido referida em mais situações de aula.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C., & Nunes, F. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Reston, VA: NCTM.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação-DGDIC.

Brunheira, L., & Ponte, J. (2016). Realizar construções geométricas com o Geogebra: O contributo do AGD para a estruturação geométrica . In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Recursos na Educação Matemática, Livro de Atas do Encontro em Investigação em Educação Matemática - EIEM 2016* (pp. 341-353). SPIEM: Évora.

Burger, W. F., & Shaughnessy J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 31-48.

Clements, D. & Battista, M. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 420-464). Nova Iorque: Macmillan.

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. Disponível em http://www.spce.org.pt/sem/cc.pdf e consultado a 5 de julho de 2017.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina.

Damião, H., Festas, I., Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

De Villiers, M., (2010), Some Reflections on the Van Hiele Theory, *Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics*. Zagreb.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria: El modelo de van Hiele. In M. V. Sánchez (Eds), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295 – 384). Sevilha: Alfar.

Lorenzato, S. (1995). Por que não Ensinar Geometria?. *A Educação Matemática em Revista*, 3-13.

Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de Matemática do ensino básico. *Educação e Matemática*, *105*, 61-66.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997*).* Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3)*, 219-248.

Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. (Dissertação de doutoramento). Lisboa: APM

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (1999). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 1995).

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2014).

Pegg, J. (1992). Students' Understanding of Geometry: Theoretical Perspectives. In B. Southwell, B. Perry & Owens, K. (Eds.), *Space The First and Final Frontier* (pp. 18-36). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Pinheiro, A. & Carreira, S. (2013). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros*. Disponível em http://eiem2013.spiem.pt/wp-content/uploads/2013/05/GD1C5PinheiroCarreira.pdf e consultado a 10 de fevereiro de 2017.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2016). O que nos diz a investigação em Didática da Matemática?. In M. H. Martinho, R. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.) *Atas Provisórias do XXVII Sem. Investigação em Educação Matemática* (pp. 5-19). Porto: APM. Disponível em http://www.apm.pt/files/_1_CP1_Ponte_570cddf9bcc3c.pdf e consultado a 20 de junho de 2017.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Orgs.), *Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação.

Swoboda, E. & Vighi, P. (2016). Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. In *ICME-13 Topical Surveys*, Series editor Gabriele Kaiser, Faculty of Education, University of Hamburg, Hamburg, Germany, Springer DOI 10.1007/978-3-319-44272-3.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: University of Chicago.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: IIE.

Van Putten, S. (2008). Levels of Thought in Geometry of Pre-service Mathematics Educators according to van Hiele Model. (Dissertação de Mestrado não publicada). University of Pretoria: USA. Disponível em https://repository.up.ac.za/bitstream/handle/2263/24834/dissertation.pdf?sequence=1&isAllowed=y e consultado a 7 de maio de 2017.

Anexos

Anexo A

Anexo 1: Exemplos de atividades para a aprendizagem da semelhança de figuras planas e espaciais (Díaz, Gutiérrez e Jaime, 2016, p. 112)

	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
Fase 1	· Identifica atributos físicos de figuras semelhantes e não semelhantes do mundo real.		· Demonstra de forma dedutiva informal a semelhança de polígonos.	
Fase 2	· Identifica características visuais de figuras semelhantes e estabelece relações.	· Constrói figuras homotéticas e identifica as suas propriedades. · Identifica propriedades de figuras congruentes e semelhantes.	· Descobre, a partir da experimentação, o Teorema de Tales e demonstra-lo de forma dedutiva informal com base na semelhança de triângulos.	· Utiliza os critérios de semelhança de triângulos para demonstrar o critério de semelhança de polígonos.
Fase 3	· Expressa, por escrito e oralmente, as características de duas figuras semelhantes. · Identifica regularidades em figuras semelhantes.	· Argumenta de forma empírica as tuas conclusões e resultados.	· Explica aos teus colegas a demonstração que realizaste, utilizando argumentos abstratos.	· Apresenta, por escrito e oralmente, demonstrações de teoremas usando linguagem formal.
Fase 4	· Utiliza a semelhança para calcular longitudes proporcionais.	· Demonstra experimentalmente e justifica, mencionando definições ou propriedades, a semelhança de polígonos.	· Estabelece conjeturas e demonstra informalmente o Teorema de Varignon.	· Estabelece conjeturas e demonstra formalmente critérios de semelhança de pirâmides.
Fase 5	· Realiza uma síntese das características visuais de figuras semelhantes e não semelhantes.	· Define os conceitos de semelhança e homotetia. · Resume os critérios de semelhança e homotetia.	· Resume as diferentes formas de construção de figuras semelhantes e explicita as suas características.	· Determina relações entre semelhança de figuras planas e volume de figuras semelhantes. · Constrói um mapa concepual sobre o

	· Realiza uma síntese das relações entre medidas, áreas e volumes de figuras semelhantes.	· Associa as propriedades de semelhança de triângulos às de semelhança de polígonos.	tema das semelhanças de polígonos geométricos.

Anexo 2: Distribuição das cotações no exame nacional de 9.º ano (disponível em http://provas.iave.pt/np4/file/163/IE_PF_Mat92_2017.pdf).

Domínios	**Cotação (em pontos)**
Números e Operações (NO)	5 a 15
Geometria e Medida (GM)	35 a 45
Funções, Sequências e Sucessões (FSS)	5 a 15
Álgebra (ALG)	25 a 35
Organização e Tratamento de Dados (OTD)	5 a 15

Anexo 3: Oferta formativa do Agrupamento de Escolas de Caneças no ano letivo 2016/2017 (disponível em http://aecanecas.com/ano-letivo-2016-2017/oferta-formativa-2016-2017.html).

<table>
<tr><th colspan="2">ENSINO</th><th>ESCOLA</th></tr>
<tr><td rowspan="7">ENSINO BÁSICO</td><td rowspan="4">1.º Ciclo e JI</td><td>Escola Básica Artur Alves Cardoso</td></tr>
<tr><td>Escola Básica Cesário Verde</td></tr>
<tr><td>Escola Básica Francisco Vieira Caldas</td></tr>
<tr><td>Escola Básica Maria Costa</td></tr>
<tr><td>5.ºs, 6.ºs e 7.ºs anos</td><td>Escola Básica de Castanheiros</td></tr>
<tr><td>8.ºs e 9.ºs anos</td><td>Escola Secundária de Caneças</td></tr>
<tr><td>Cursos vocacionais</td><td>Escola Secundária de Caneças</td></tr>
</table>

ENSINO SECUNDÁRIO	Cursos Científico-Humanísticos: Ciências e Tecnologias Ciências Socioeconómicas Línguas e Humanidades Artes Visuais	Escola Secundária de Caneças
	Cursos profissionais: Técnico de Turismo Técnico de Vendas Técnico de Apoio à Infância	Escola Secundária de Caneças (Centro para a Qualificação e Ensino Profissional de Caneças)
ENSINO NOTURNO	RVCC (conclusão dos 9.º e do 12.º anos) Módulos Capitalizáveis (conclusão do 12.º ano) Curso EFA de Nível Básico (conclusão dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico) Cursos EFA de Nível Secundário (conclusão do 12.º ano) Curso EFA de dupla certificação Português para Estrangeiros	Escola Secundária de Caneças (Centro para a Qualificação e Ensino Profissional de Caneças)

Anexo 4: Planificação anual do 9.º ano na disciplina de Matemática no Agrupamento de Escolas de Caneças, em vigor no ano letivo 2016/2017.

Planificação anual		
Período letivo	**Unidades**	**Tempos (45 min)**

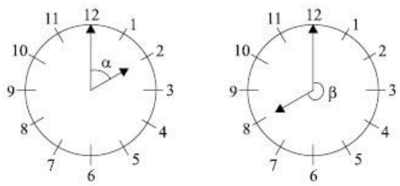
1.º período	Estatística e probabilidades	19	59
	Funções	15	
	Equações	16	
	(momentos formais de avaliação)	9	
2.º período	Geometria	44	62
	Números reais e Inequações	10	
	(momentos formais avaliação)	8	
3.º período	Número reais e Inequações (continuação)	6	32
	Trigonometria no triângulo retângulo	14	
	(momentos formais de avaliação)	8	
	(aulas de preparação para o Exame Nacional)	4	

Anexo B: As tarefas

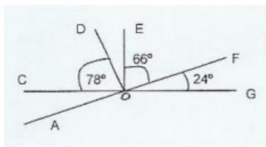
Anexo 5: "Ficha diagnóstico"

Escola [redacted]	9º [redacted]	**Ficha Diagnóstico** **Ângulos e circunferências**
	23.02.2017	Nome: ______________________________

1. Através dos mostradores de relógio da figura, determine as amplitudes dos ângulos α e β representados.

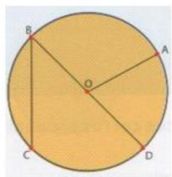


2. Considerando a figura e utilizando as letras apresentadas na mesma, indique:



a) Um ângulo agudo: __________________________
b) Um ângulo obtuso: __________________________
c) Um ângulo reto: ____________________________
d) Dois ângulos adjacentes:
____
e) Dois ângulos suplementares:
____
f) Dois ângulos verticalmente opostos:
____

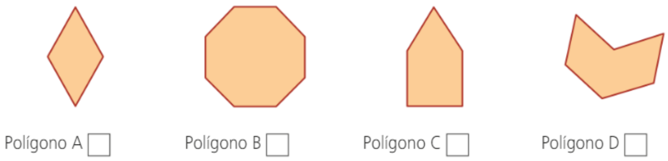
3. Observando a figura, indique o valor lógico (V: verdadeiro ou F: falso) de cada uma das seguintes afirmações:



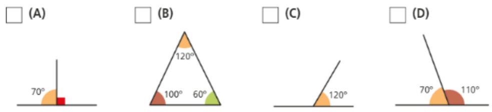
a) A circunferência desenhada tem centro em O e raio [BD]. ___
b) [OB] é um raio. ___
c) [BC] é um diâmetro. ___
d) [BC] é uma corda. ___
e) [BD] é um diâmetro. ___
f) $\overline{BD} = 2\times\overline{AO}$. ___

4. Numa rotação de centro O e uma determinada amplitude, a imagem de um triângulo equilátero é: (assinale a opção correta)
a) Um triângulo retângulo.
b) Um triângulo equilátero geometricamente igual.
c) Uma ampliação do triângulo equilátero.
d) Um triângulo obtusângulo.

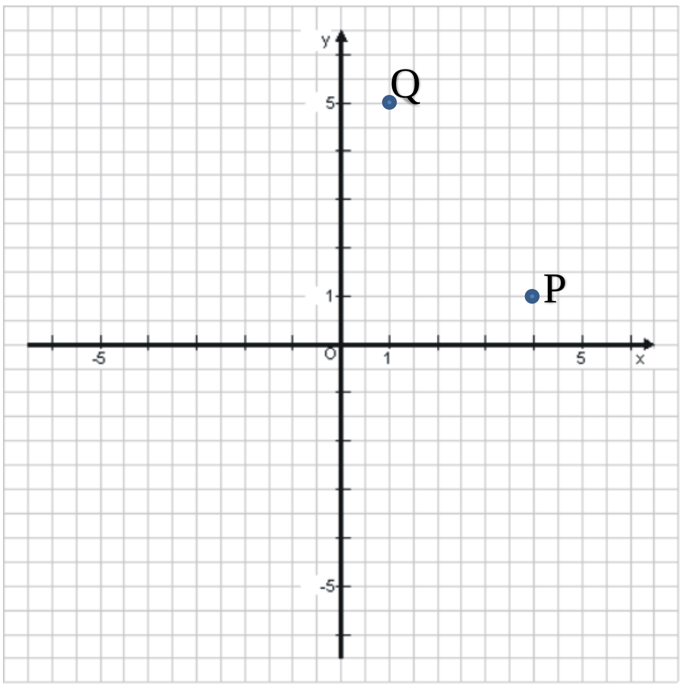
5. Dos seguintes polígonos, assinale o(s) regular(es)?



6. Quais das seguintes figuras não são possíveis de desenhar com os valores apresentados? Porquê?



a) No referencial apresentado, identifique os pontos que verifiquem em simultâneo as condições seguintes:
   - Distar 3 unidades de medida de P.
   - Distar 4 unidades de medida de Q.



Anexo 6: Tarefa "Arcos e cordas"

<table>
<tr><td rowspan="2">Escola [redacted]</td><td>9º [redacted]</td><td>Tarefa "Arcos e cordas"</td></tr>
<tr><td>02.03.2017</td><td>Nome: ______________________________</td></tr>
</table>

A tarefa "Arcos e cordas" será realizada no programa GeoGebra, para tal, efetue os seguintes passos com auxílio do guião anexo. Após a sua construção deverá completar os espaços em branco nos retângulos apresentados onde constam algumas definições dos elementos em estudo (ângulo ao centro, arco menor, arco maior, corda e segmento de círculo).

1. Construa uma circunferência de centro O.
2. Contrua um ângulo ao centro.

Dada uma circunferência, chama-se ___________________ a todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

3. Trace o arco (menor) AB.
4. Trace o arco maior AB.

A interseção de uma circunferência com um seu ângulo ao centro designa-se por arco de circunferência.

A interseção de uma circunferência com as semi-retas que formam os lados de um ângulo ao centro designam-se por extremos do arco.

Considerando uma circunferência de centro O, o ângulo ao centro AOB e o arco de extremos A e B. Este arco é determinado pelo ângulo convexo AOB, pelo que se designa arco menor AB ou simplesmente, arco AB.

O arco determinado pelo ângulo côncavo AOB designa-se por arco maior AB. Neste caso, como o ponto B pertence ao arco maior AB, é possível representar esse arco por arco ABC.

5. Trace a corda [AB].

Um segmento de reta que une dois quaisquer _________ da circunferência diz-se uma corda.

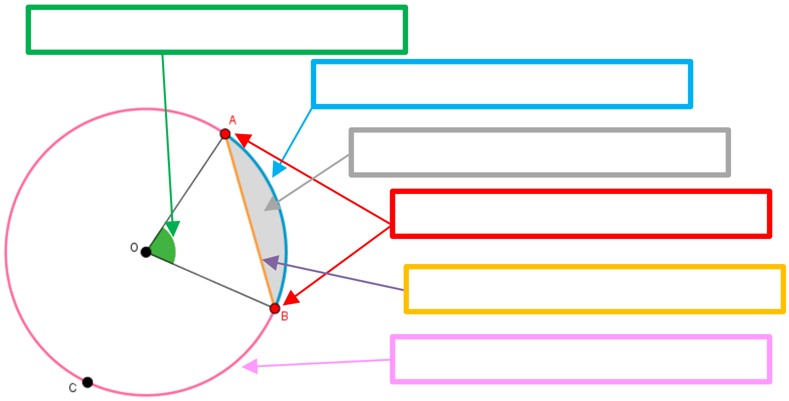
O segmento de reta que une os pontos ____ e ____ designa-se por corda [AB].

Os arcos de extremos ____ e ____ designam-se por arcos subtensos pela corda [AB]. Em particular, o arco menor AB diz-se o arco correspondente à corda AB.

6. Realce o segmento de círculo menor AB.

Um segmento de círculo é a região do círculo compreendida entre _________________ e o arco por ela subtenso. Este arco diz-se maior quando o arco for maior e menor quando o arco for menor.

7. Com base na construção efetuada e nas definições apresentadas, legende a seguinte figura:



Anexo 7: Guião da tarefa "Arcos e cordas"

Observações iniciais sob orientação da professora
Os botões mais usados em Geometria.
Como anular ações anteriores.
Acionar objetos (selecionar/deselecionar).
Várias opções de construção (ex: circunferência através de dois pontos ou de um ponto e o raio).
Ângulo (anti-horário).
Tipos de rótulo.
Mudar cor/espessura.

1. Construa a circunferência

Passo 1 Selecione:

Passo 2 Marque dois pontos, o primeiro (A) é o centro e o segundo (B) é um ponto pelo qual quer que a circunferência passe.

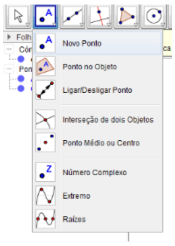
Passo 3 Clique com o botão direito do rato sobre:

- a cónica "c: ..." e desselecione a opção "Mostrar rótulo";
- o ponto A e selecione a opção "Renomear", designando-o por ponto O;
- o ponto B e selecione a opção "Renomear", designando-o por ponto A.

Passo 4 Mova o ponto A de modo a perceber o que essa movimentação provoca. Mova agora o ponto O e verifique o que acontece.

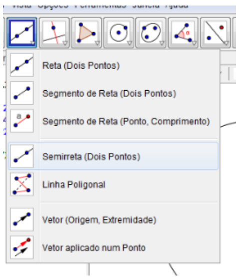
2. Construa um ângulo ao centro

Passo 1 Comece por criar um novo ponto, selecionando:



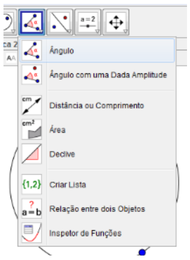
Clique sobre a circunferência na localização que preferir para esse ponto (B).

Passo 2 Para marcar as semi-retas de suporte dos lados do ângulo, selecione:



Clique no ponto O e de seguida no A. Repita, clicando no ponto O e seguidamente no ponto B.

Passo 3 Selecione agora:

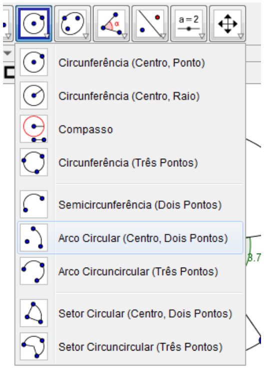


Selecione agora um dos pontos (A ou B), de seguida o vértice (O) e por último o ponto que resta. Deve ter em atenção que, no GeoGebra, os ângulos são sempre construídos no sentido anti-horário.

Passo 4 Desselecione os rótulos das semi-retas *f* e *g*.

3. Trace o arco (menor) AB

Passo 1 Selecione:



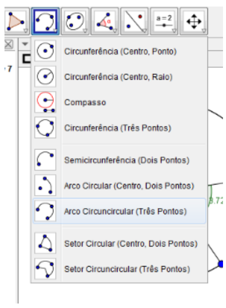
Clique primeiro sobre o vértice (O) do ângulo e posteriormente nos pontos A e B (segundo o sentido anti-horário).

Para destacar o arco, aumente a espessura e mude a cor do mesmo.

4. Trace o arco maior AB

Passo 1 Crie um novo ponto (C) sobre a circunferência que pertença ao arco maior.

Passo 2 Selecione agora:

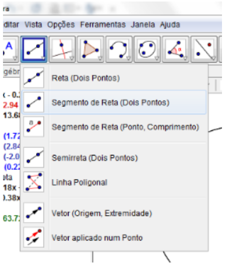


Posteriormente, clique sobre os pontos B, C e A (em qualquer um dos sentidos).

Para destacar o arco, aumente a espessura e mude a cor do mesmo.

5. Trace a corda [AB]

Passo 1 Selecione:



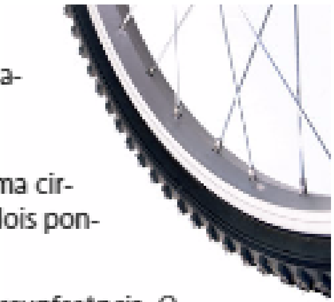
De seguida, clique sobre os pontos A e B.

Para destacar o segmento de reta, aumente a espessura e mude a cor do mesmo.

6. Realce o segmento de círculo menor AB.

Passo 1 Clique com o botão direito do rato sobre o arco menor AB, selecione "Propriedades dos objetos", de seguida "Cor" e nesse separador aumente a "Opacidade" (mais de 50).

Anexo 8: Tarefa "Investigando a circunferência" (adaptada do manual).



Parte I

Pretende-se que com uma pequena investigação encontres algumas relações entre arcos e cordas de uma circunferência.

1.º Recorre a um programa de geometria dinâmica para construíres uma circunferência de centro *O*. De seguida, marca sobre a circunferência dois pontos distintos, *A* e *B*, e desenha a corda [*AB*].

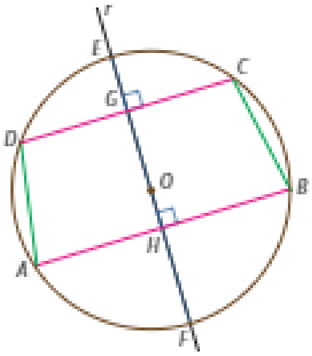
2.º Traça uma reta perpendicular à corda [*AB*] que passe no centro da circunferência, *O*.

3.º Designa por *H* o ponto que resulta da interseção da corda [*AB*] com a reta perpendicular construída no ponto anterior. Compara os segmentos de reta [*AH*] e [*HB*].

4.º Movimenta o ponto *A* ao longo da circunferência.

Parte II

5.º Marca sobre a circunferência dois pontos distintos dos anteriores, *C* e *D*, e desenha a corda [*CD*] de modo a que esta seja paralela à corda [*AB*].



6.º Designa por *H* e por *G* os pontos que resultam, respetivamente, da interseção das cordas [*AB*] e [*DC*] com a reta perpendicular construída no ponto anterior. Compara as cordas [*AD*] e [*BC*].

7.º Compara, também, os arcos *DA* e *BC*.

8.º Movimenta o ponto *A* ao longo da circunferência.

Anexo 9: Tarefa "ângulos excêntricos" (adaptada do manual).

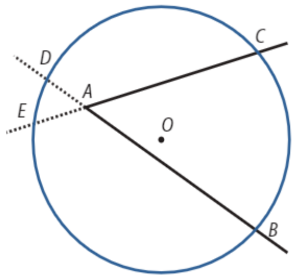
Um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência chama-se ângulo ao centro. Quando o vértice não se encontra no centro da circunferência, o ângulo diz-se **excêntrico**.

Mediante a posição do vértice, podem distinguir-se três tipos de ângulos excêntricos: os ângulos inscritos numa circunferência, os ângulos com o vértice no interior de uma circunferência e os ângulos com o vértice no exterior de uma circunferência.

Em aulas anteriores, já relacionaste a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do arco correspondente. Vejamos, agora, se existe alguma relação entre a amplitude dos restantes ângulos excêntricos e as amplitudes dos arcos que lhes correspondem.

Parte I

Recorre a um programa de geometria dinâmica para construíres o ângulo excêntrico *BAC*, com o vértice no interior de uma circunferência de centro *O*. Prolonga os lados do ângulo e assinala os pontos *D* e *E*, pontos de interseção desses prolongamentos com a circunferência, tal como a figura sugere. Por fim, desenha o segmento de reta [*DC*].



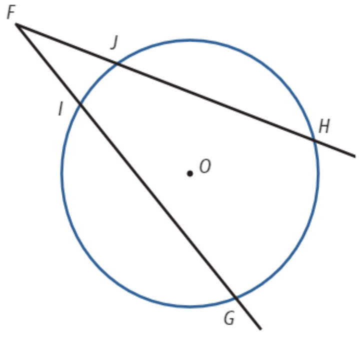
1. Determina a medida das amplitudes dos ângulos *BDC*, *DCE* e *BAC*.

2. Considera os ângulos *BDC* e *DCE*. Determina a soma das amplitudes dos arcos correspondentes.

3. Movimenta, dentro da circunferência, o vértice do ângulo excêntrico para posições diferentes, obtendo assim novos ângulos excêntricos. Encontras alguma relação entre a soma das amplitudes dos arcos *BC* e *DE* e a amplitude do ângulo excêntrico considerado? Qual?

Parte II

Continuando a utilizar um programa de geometria dinâmica, constrói o ângulo excêntrico *GFH*, com o vértice no exterior de uma circunferência de centro *O*. Assinala os pontos *I* e *J*, pontos de interseção das semirretas que formam o ângulo com a circunferência, tal como a figura sugere. Desenha o segmento de reta [*IH*].



4. Determina as amplitudes dos ângulos *JHI*, *GIH* e *GFH*.

5. Determina a diferença entre a amplitude do arco *GH* e a amplitude do arco *JI*.

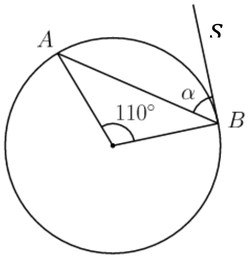
6. Movimenta, no exterior da circunferência, o vértice do ângulo excêntrico para posições diferentes, obtendo assim novos ângulos excêntricos. Encontras alguma relação entre a diferença encontrada na questão anterior e a amplitude do ângulo excêntrico considerado? Qual?

Anexo 10: Tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos"

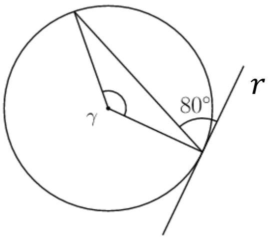
Escola [redacted]	9º [redacted]	**Tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos"**
	21.03.2017	Nome: ______________________________

1. Sabendo que as retas s e r são tangentes a cada uma das circunferências, calcule a amplitude dos ângulos α e γ apresentando as justificações que lhe pareçam necessárias.

a)

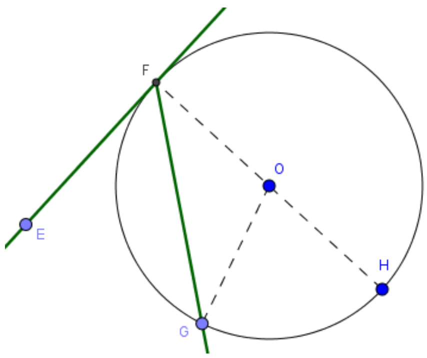


b)



2. Sabendo que:
   i. A reta EF é tangente à circunferência no ponto F;
   ii. $G\hat{O}H = 82°$.

   Determine:



a) $\widehat{FG}$

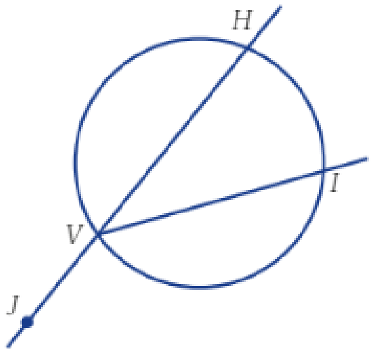
b) $E\hat{F}G$

c) $G\hat{F}H$

d) $E\hat{F}H$

e) $\widehat{FHG}$

3. Na figura, o ponto V pertence à reta HJ.
   a) Na figura, está representado um ângulo inscrito e um ângulo ex-inscrito. Indica-os.



   b) Admitindo que:
      i. $H\hat{V}I = 31^{\circ}$, calcule $J\hat{V}I$.

      ii. $\widehat{HI} = 72^{\circ}$, calcule $J\hat{V}I$.

      iii. $\widehat{VH} = 100°$ e $\widehat{VI} = 94°$, calcule $J\hat{V}I$.

Anexo 11: Tarefa "Ângulos internos de um polígono".

Escola [redacted]	9º [redacted]	**Tarefa "Ângulos internos de um polígono"**
	27.03.2017	Nome: ______________________________

(Após realizar a tarefa, cole o seu polígono aqui.)

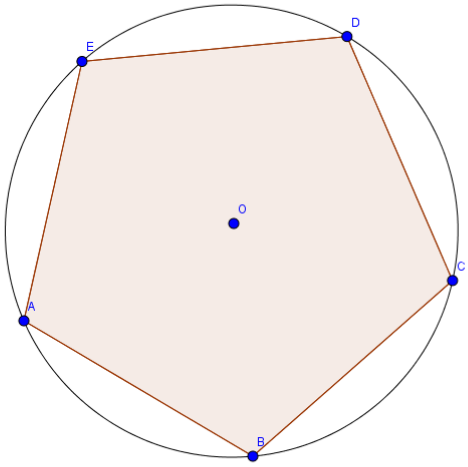
1. A partir de um dos vértices do polígono que lhe foi entregue, trace as diagonais unindo, esse vértice a cada um dos outros vértices não adjacentes.
2. Relativamente ao polígono que lhe foi entregue, quantos lados tem e em quantos triângulos foi decomposto? Responda diretamente na tabela abaixo.
3. Vamos agora discutir em turma os resultados dos vários grupos.
4. Calcule a soma dos ângulos internos do polígono que lhe foi entregue (indique-a na tabela).
5. Após discussão em turma, complete o preenchimento da tabela.

Polígono	Nº de lados	Nº de triângulos	Soma dos ângulos internos do polígono (S_i)
losango			
pentágono			
hexágono			
heptágono			
octógono			
	n		

Anexo 12: Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular".

Escola [redacted]	9º [redacted]	**Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular"**
	30.03.2017	Nome: ________________________________

1. Observe o pentágono regular [ABCDE] inscrito na circunferência de centro O representada ao lado.



a. Trace os segmentos de reta [AO], [OB], [OC], [OD] e [OE]. Que relação existe entre os arcos AB, BC, CD, DE e EA?
E entre os ângulos ao centro AOB, BOC, COD, DOE e EOA? Justifique.

____

____

____

b. Com base na resposta à questão anterior, calcule a amplitude do ângulo ao centro COD.

2. Preencha a tabela seguinte estabelecendo um raciocínio análogo ao que utilizou na questão anterior.

Polígono	N.º de lados	Amplitude de um ângulo ao centro
Pentágono regular		
Hexágono regular		
Heptágono regular		
Octógono regular		
n-ágono regular	n	

Anexo 13: Tarefa "Construir polígonos regulares".

Escola [redacted]	9º [redacted]	**Tarefa "Construir polígonos regulares"**
	30.03.2017	Nome: ______________________________

Através da tarefa anterior, foi-lhe possível concluir que os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são todos geometricamente iguais e que a **amplitude de cada um** deles é $\frac{\mathbf{360}}{\boldsymbol{n}}$, sendo $\boldsymbol{n}$ **o número de lados do polígono**.

Vejamos o método seguinte para **inscrever um pentágono regular numa circunferência**.

1.º passo: Calcule a amplitude do ângulo ao centro do pentágono regular. (Apresente o cálculo que efetuar).
2.º passo: Trace uma circunferência de centro O e com um raio à sua escolha.
3.º passo: Nessa circunferência construa, com o auxílio de um transferidor, um ângulo ao centro com a amplitude que calculou no 1.º passo.
4.º passo: Coloque a ponta seca do compasso num extremo do arco que obteve e a outra ponta do compasso sobre o outro extremo do arco. Com essa abertura do compasso, divida a circunferência em cinco arcos geometricamente iguais.
5.º passo: Una os pontos resultantes da interseção da circunferência com as marcas que a dividiram de forma a obter um pentágono regular.

Anexo 14: Questionário

<table>
<tr><td rowspan="3">Escola [redacted]</td><td colspan="2">Questionário</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2017.abr.04</td><td>Nome:
_________________________________ 9º F</td></tr>
<tr><td>nº: ____</td></tr>
</table>

Tendo em conta todo o trabalho desenvolvido na subunidade "Ângulos e circunferências", responda individualmente às seguintes questões.

1. Indique um aspeto positivo e outro negativo de que se recorde do trabalho desenvolvido nas aulas de matemática nesta subunidade.

2. Qual o conteúdo que achou mais interessante nesta subunidade? Porquê?

3. Quais as tarefas que mais gostou de realizar nesta subunidade? Porquê?

4. As discussões com toda a turma durante a realização das tarefas em sala de aula parecem-lhe vantajosas para aprender? Porquê?

5. E o que acha, em particular, do papel que desempenhou nessas discussões? Dê um exemplo concreto.

6. Considera que os conteúdos abordados nestas aulas têm relação com a realidade? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

7. Dos recursos usados nestas aulas, quais considera mais interessantes? Explique.

8. Dos recursos usados nestas aulas, quais considera que mais contribuíram para a sua aprendizagem? Explique.

9. O *feedback* escrito que a professora foi realizando às suas resoluções das tarefas foi benéfico? Porquê?

10. Quais as suas maiores dificuldades nesta subunidade?

Anexo C: Autorizações/Comunicados

Anexo 15: Pedido de autorização ao diretor da escola.

Exmo. Sr.

Diretor do Agrupamento de Escolas [redacted]

Eu, Maria Mariana Guerreiro, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática [redacted], venho, por este meio, solicitar autorização para realizar um projeto de investigação em educação com a turma do 9.º [redacted]. Este trabalho de cariz investigativo, intitulado "O raciocínio geométrico dos alunos de 9.º ano no estudo da circunferência", integra-se no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O referido projeto terá por base a lecionação da subunidade "Geometria: circunferência, ângulos e polígonos", durante o 2.º período escolar, ao longo de 22 tempos de 45 minutos. O estudo tem como principal objetivo analisar o raciocínio geométrico dos alunos de 9º ano no estudo da circunferência.

Para a concretização deste trabalho de cariz investigativo será fundamental a recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, com a informação sobre esta investigação, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

[redacted], ___ de _________ de 2017

A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Maria Mariana Guerreiro)

Anexo 16: Pedido de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma.

Exmo. Sr.
Encarregado de Educação do(a) aluno(a) da turma do 9.º [redacted]

Eu, Maria Mariana Guerreiro, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática [redacted], venho por este meio comunicar que a turma do 9.º [redacted] irá participar num estudo, ao longo das aulas entre os dias 2 de março e 4 de abril, inclusive, no âmbito da unidade de ensino de Geometria. Este estudo, intitulado "O raciocínio geométrico dos alunos de 9.º ano no estudo da circunferência", visa analisar o raciocínio geométrico dos alunos de 9º ano no estudo da circunferência. O referido estudo, autorizado pela Direção da Escola, integra-se no Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais se esclarece que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 9.º ano. Para a sua concretização será essencial a participação voluntária dos alunos, bem como, o consentimento dos respetivos Encarregados de Educação (preenchendo, assinando e encaminhando para a Professora de Matemática da turma).

Para a realização deste trabalho será imprescindível a recolha de documentos produzidos pelos alunos em sala de aula e da transcrição de eventuais entrevistas aos alunos, as quais poderão decorrer, pontualmente, num horário favorável para os alunos e combinado com os respetivos Encarregados de Educação. As aulas serão também registadas em vídeo e posteriormente transcritas mas as imagens e documentos recolhidos destinam-se unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

[redacted], ___ de ____________ de 2017

A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Maria Mariana Guerreiro)

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ________________________________, n.º ____, da turma 9.º [redacted], tomei conhecimento dos objetivos do estudo a realizar no âmbito da unidade de ensino "Geometria" que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 2.º Período, e ___________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando, com a garantia da sua privacidade e anonimato.

Relativamente à gravação de imagens das aulas, apenas para análise neste estudo, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

Quanto à realização de entrevistas, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

_____ de __________ de 2017

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 17: Comunicado ao Diretor de Turma.

Exmo. Sr.

Diretor de Turma do 9.º [redacted]

Eu, Maria Mariana Guerreiro, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática **Anabela Candeias**, venho, por este meio, comunicar que a turma do 9.º [redacted] irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Geometria", durante o 2.º período escolar, ao longo de 22 tempos de 45 minutos. Este estudo, autorizado pela Direção da Escola a ___ de ________ de 2017, integra-se no meu trabalho final do Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, a Coordenação do Departamento de Matemática, os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 9.º ano.

A concretização deste trabalho implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

[redacted], _____ de _________ de 2017

____

(Maria Mariana Guerreiro)

Tomei conhecimento,

____

(O Diretor de Turma do 9.º [redacted])

Anexo 18: Comunicado ao Coordenador do Departamento de Matemática.

Exma. Sra.

Coordenadora do Departamento de Matemática

Eu, Maria Mariana Guerreiro, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, comunicar que a turma do 9.º [redacted] irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Geometria", durante o 2.º período escolar, ao longo de 22 tempos de 45 minutos. Este estudo, autorizado pela Direção da Escola a ___ de __________ de 2017, integra-se no meu trabalho final do Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, o Diretor de Turma do 9.º [redacted], os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 9.º ano.

A concretização deste trabalho implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

[redacted], _____ de __________ de 2017

____

(Maria Mariana Guerreiro)

Tomei conhecimento,

____

(A Coordenadora do Departamento de Matemática)

Anexo D: Planos de aula

Anexo 19: Plano da aula do dia 2 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	02.mar.2017	**Ângulos e circunferências** Elementos da circunferência

Sumário

- Início do estudo da subunidade: ângulos e circunferências.
- Realização da tarefa “Arcos e cordas” com recurso ao software Geogebra.

Conteúdos matemáticos

- Elementos da circunferência (ângulo ao centro, arco, corda, extremos de um arco e segmento de círculo)

Objetivos

- Saber identificar, designar e utilizar corretamente os termos: “ângulo ao centro”, “extremos de um arco”, “arco de circunferência”, “arco menor”, “arco maior”, “corda”, “arco subtenso pela corda ...”, “arco correspondente pela corda...”.
- Saber construir no software Geogebra, com auxílio de um guião, os elementos da circunferência enumerados no objetivo anterior;

Capacidades transversais

- Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)

Recursos e Materiais

Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Enunciados da tarefa; · Guiões de construção no software; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Computador (com o software Geogebra instalado); · Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação

- A professora, por observação, fará o registo habitual das participações dos alunos ao longo da aula
- A professora analisará os ficheiros GeoGebra construídos pelos alunos
- A professora recolherá as tarefas escritas dos alunos fazendo a sua posterior análise e devolverá numa aula seguinte as mesmas com o respetivo feedback

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças** · **Distribuição dos alunos pelos computadores**	**10 min**	**13h35**
II	· **Vídeo promocional da unidade (Isto é Matemática)** · **Relação entre vídeo e os conteúdos da unidade**	**5 min**	**13h45**
III	· Tarefa “Arcos e circunferências” (enunciado + guião)	65 min	13h50
IV	· Conclusão em turma	10 min	14h55

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- À medida que os alunos entram na sala, são direcionados para os lugares estabelecidos pela professora, para trabalharem no computador.
- São registadas as faltas (de presença e de pontualidade);

Papel professor e papel do aluno
Por ser uma aula diferente do habitual, os alunos poderão manifestar maior agitação, assim importa que a professora tente fazer a distribuição dos lugares o mais rápido possível. Também neste sentido, este momento inicial servirá para estabelecer o que é esperado por parte dos alunos na primeira parte da aula: · Para que haja alguma organização do espaço de trabalho, os alunos deverão ter sobre a mesa apenas o material necessário a cada momento: no início, somente para escreverem o sumário, deverão ter o caderno diário e arrumá-lo após isso; durante a realização da tarefa de construção deverão ter, cada um, um enunciado da tarefa e, por par, um guião de construção no *software*; durante toda a aula precisarão de lápis (e borracha) ou caneta; · No momento inicial irão ver um curto vídeo que, ainda assim não se espera um papel passivo do aluno, devendo este estar atento a todas as relações que a professora estabelecer; o conteúdo do vídeo, esse, será discutido *a posteriori* numa aula em que nos debruçaremos sobre o conteúdo do mesmo, momento no qual já poderão perceber o que significam alguns termos utilizados, nomeadamente ângulos inscritos; · Durante a visualização do filme os alunos não deve fazer qualquer uso do programa, devendo fazê-lo apenas quando a professora o indicar.

MOMENTO II

Visualização do vídeo e discurso motivador		
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
O vídeo, para quem o vê pela primeira vez como é o caso da turma, é bastante rápido e não dá tempo suficiente aos alunos para ir assimilando o que está a ser dito.	Atendendo à dificuldade prevista, é importante que a professora faça duas pausas no vídeo, explicitando o que foi dito anteriormente e fazendo questões que vão ser respondidas pelo vídeo posteriormente. Qualquer uma dessa pausas não deverá chegar a um minuto de duração.	À partida não será pedida a colaboração direta dos alunos, ainda assim ele não deve assumir um papel passivo, devendo este estar atento tanto ao vídeo como a todas as relações que a professora for estabelecendo.
No final da aula, pelo facto de o aluno não entender alguns termos dos que foram	Importa, no final do vídeo, a professora esclarecer que a ideia não passa por dizer que “com a tarefa que vão realizar hoje,	

enunciados ao longo do vídeo e pelos mesmos não serem esclarecidos com a realização da tarefa, os alunos podem não perceber o porquê do vídeo ter surgido.	poderão dar a resposta à questão sugerida pelo vídeo". Deve então clarificar que este vídeo surge como mote para o estudo da unidade didática que iniciamos então e que, supostamente, sim, mais tarde poderemos discutir e responder à questão lançada pelo vídeo. Através dele conseguimos perceber como a Matemática pode estar presente em diversas situações.	

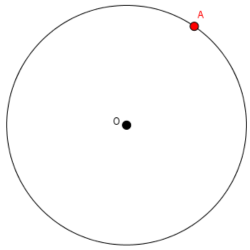
MOMENTO III

- Ao distribuir a tarefa, a professora deverá sublinhar a importância de a realizarem cooperativamente em díade e advertir, antecipadamente, que no final da tarefa os alunos não podem desligar os computadores para que a professora consiga guardar os trabalhos de cada um dos pares;
- Os alunos apenas interagiram com o GeoGebra no domínio das funções (no ano anterior), assim, a maioria das funções do programa que estão ao serviço da Geometria não são conhecidas por eles. Por esse motivo, antes de iniciarem a tarefa, a professora fará uma breve abordagem às principais funções do programa com as quais trabalharão nesta aula, abordando os 1º e 5º aspetos dos enumerados na tabela seguinte.

Primeira tabela do guião de construção
Observações iniciais sob orientação da professora
1º Os botões mais usados em Geometria.
2.º Como anular ações anteriores.
3º Acionar objetos (selecionar/deselecionar).
4º Várias opções de construção (ex: circunferência através de dois pontos ou de um ponto e o raio).
5º Ângulo (anti-horário).
6º Tipos de rótulo.
7º Mudar cor/espessura.

- Os restantes aspetos serão explicados aquando da resolução da primeira questão.

- A primeira questão será realizada sob a orientação da professora (projetada no quadro), devendo os alunos seguir essa resolução e reproduzir os passos que a professora efetuar.

<table>
<tr><td colspan="3">Questão 1 da tarefa</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Construa uma circunferência de centro O.</td></tr>
<tr><td>Dificuldades previstas</td><td>Papel professor</td><td>Papel aluno</td></tr>
<tr><td>Tal como referido anteriormente os alunos não terão, à partida, um domínio muito grande sobre as funções do programa no âmbito da Geometria.
Ainda que o programa seja bastante explícito, organizado e simples, os alunos poderão ter alguma dificuldade em acompanhar a resolução da professora.
Os alunos podem manifestar dificuldades em gerir três “documentos” diferentes: o enunciado da tarefa, o guião de construção e o ficheiro GeoGebra.</td><td>A professora deverá dar o tempo necessário para os alunos experimentarem e executarem as funções que a docente propuser à turma. Contrabalançando, esta necessidade dos alunos a nível de tempo com a importância de estabelecer um bom ritmo da aula que respeite o ritmo de cada um.
Esta realização “acompanhada” da primeira questão da tarefa tem também como objetivo ajudar os alunos a perceberem o modo como irão orientar a sua própria construção, isto é, a utilizarem o guião como auxílio na construção no software e dessa forma concretizar o que é pedido em cada questão da tarefa.
Para se certificar de que os alunos estão a seguir a construção, a professora poderá lançar algumas questões à turma.</td><td>Da parte dos alunos é essencial que estes estejam concentrados e atentos às execuções realizadas pela professora no quadro. Caso contrário, poderão prejudicar o ritmo e o trabalho dos restantes colegas/pares.
Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tendo em consideração o papel do aluno e do professor e no sentido de responder às dificuldades dos alunos previstas, a professora poderá estabelecer uma interação com os alunos que se assemelhe à que se segue:
“Dos botões principais que vos apresentei, qual vos parece ser aquele através do qual vamos construir a circunferência?”, “E no vosso guião, qual é o que vos é indicado?”;
“Reparem que há duas formas de construir a circunferência. Podemos optar por selecionar dois pontos ou um ponto e o raio. Neste caso, como não nos é indicado um raio vamos optar por construi-la através de dois pontos. De que forma? Vejam o vosso guião.”
A professora construirá de seguida outra circunferência (como consequência de não alterar o botão principal em que está a trabalhar) de forma a mostrar a opção de retroceder ao passo anterior sempre que, por lapso, nos esquecermos de clicar sobre o botão , por exemplo.
A professora deve agora clarificar o motivo pelo qual lhes pediu que alterassem o nome dos objetos (pontos), explicitando que nem sempre é obrigatório fazê-lo. Do mesmo modo, deverá esclarecer o porquê de desselecionarem o rótulo da circunferência.</td></tr>
</table>

- "Eu decidi retirar o rótulo da circunferência, mas podemos até optar por outros tipos de rótulo. Isto é, conseguimos por exemplo saber o valor de todo o comprimento da circunferência." (a professora deverá exemplificar o modo de executar esta alteração)
- "Podemos ainda alterar a espessura e a cor da circunferência, tal como de outro objeto qualquer." (a professora deverá exemplificar o modo de executar esta alteração)
- "No passo 4 desta questão, o guião refere que devemos mover o ponto A e verificar o que acontece. Na realidade, mesmo que o guião não peça, vocês deverão fazê-lo sempre que possível para se aperceberem de alguns factos que conseguem descobrir através dessa visualização. Aliás, essa é uma grande vantagem deste programa, é vocês conseguirem ver as «coisas» a mexer de forma rápida e simples."

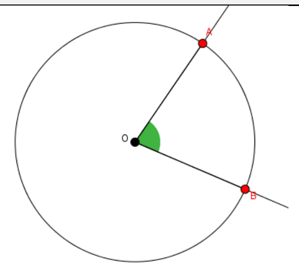
- Desta questão em diante, os alunos continuarão a resolução da tarefa autonomamente, portanto neste momento a professora deve referir que após realizarem cada construção os alunos deverão preencher os espaços em branco das definições que a essa questão dizem respeito. As definições que não têm espaços para preencher devem ser lidas com atenção e em caso de dúvida na interpretação das mesmas, deverão pedir ajuda.
- Pressupõe-se que os alunos, gradualmente, tenham maior familiarização com o *software* e consequentemente maior facilidade em realizar a construções sugeridas. Assim, a professora deverá circular pela sala para se assegurar que todos os pares estão a trabalhar de forma autónoma e em simultâneo, verificar as construções no GeoGebra e as respostas à tarefa (completamento de espaços e leitura das definições) e a partir daí tentar perceber as dúvidas ou erros mais frequentes dos alunos para melhor ir ao encontro dessas dificuldades, fazendo, se julgar necessário, uma intervenção para toda a turma em simultâneo.

Questão 2 da tarefa

2. Contrua um ângulo ao centro.

Dada uma circunferência, chama-se ____________________ a todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

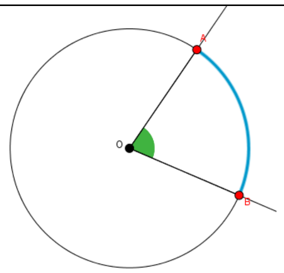
Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:



A definição deve ser concluída da seguinte forma:

Dada uma circunferência, chama-se <u>ângulo ao centro</u> a todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

Questão 3 da tarefa

3. Trace o arco (menor) AB.	
Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:	

Questão 4 da tarefa

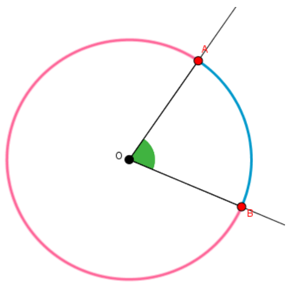
4. Trace o arco maior AB.

A interseção de uma circunferência com um seu ângulo ao centro designa-se por arco de circunferência.

A interseção de uma circunferência com as semi-retas que formam os lados de um ângulo ao centro designam-se por extremos do arco.

Considerando uma circunferência de centro O, o ângulo ao centro AOB e o arco de extremos A e B. Este arco é determinado pelo ângulo convexo AOB, pelo que se designa arco menor AB ou simplesmente, arco AB.

O arco determinado pelo ângulo côncavo AOB designa-se por arco maior AB. Neste caso, como o ponto B pertence ao arco maior AB, é possível representar esse arco por arco ABC.

Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:	

Questão 5 da tarefa

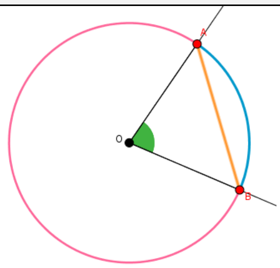
5. Trace a corda [AB].

Um segmento de reta que une dois quaisquer __________ da circunferência diz-se uma corda.

O segmento de reta que une os pontos ____ e ____ designa-se por corda [AB].

Os arcos de extremos ____ e ____ designam-se por arcos subtensos pela corda [AB]. Em particular, o arco menor AB diz-se o arco correspondente à corda AB.

Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:



A definição deve ser concluída da seguinte forma:

Um segmento de reta que une dois quaisquer pontos da circunferência diz-se uma corda.

O segmento de reta que une os pontos A e B designa-se por corda [AB].

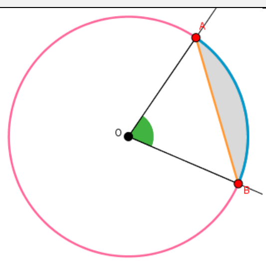
Os arcos de extremos A e B designam-se por arcos subtensos pela corda [AB]. Em particular, o arco menor AB diz-se o arco correspondente à corda AB.

Questão 6 da tarefa

6. Realce o segmento de círculo menor AB.

Um segmento de círculo é a região do círculo compreendida entre ___________________ e o arco por ela subtenso. Este arco diz-se maior quando o arco for maior e menor quando o arco for menor.

Espera-se que os alunos obtenham uma construção semelhante à seguinte:

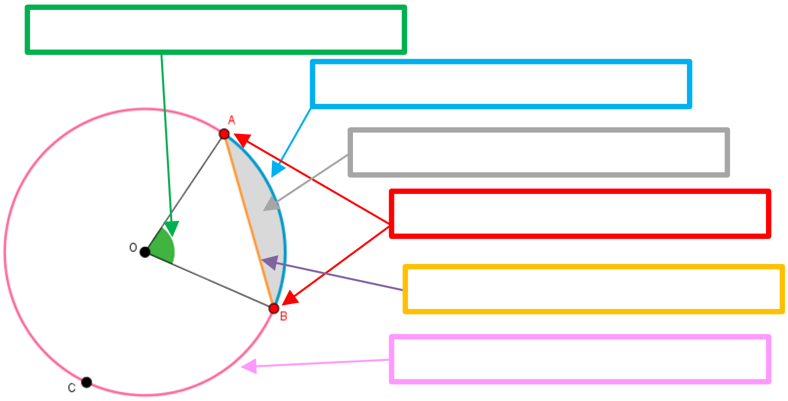


A definição deve ser concluída da seguinte forma:

Um segmento de círculo é a região do círculo compreendida entre a corda e o arco por ela subtenso. Este arco diz-se maior quando o arco for maior e menor quando o arco for menor.

Questão 7 da tarefa

7. Com base na construção efetuada e nas definições apresentadas, legende a seguinte figura:



Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Uma vez que os enunciados entregues aos alunos são a preto e branco eles poderão deparar-se com a dificuldade em perceber a que elemento se refere determinada legenda (seta). Não se espera que os alunos manifestem muitas dificuldades no preenchimento/legenda da figura.	A professora terá esta imagem projetada para que todos os alunos possam esclarecer dúvidas relacionadas com a dificuldade prevista. A professora, se vir que os alunos estão com muita dificuldade em legendar a figura, pode sugerir que reparem nas construções que obtiveram como resposta a cada uma das questões da tarefa e recorram também às definições apresentadas no enunciado da tarefa.	A legenda da figura pode ser feita com qualquer uma das alternativas (a letra pequenas) apresentadas na figura seguinte:

- A professora deve alertar para não encerrarem os computadores pois caso o façam perde-se o acesso a tudo o que fizeram.
- A professora pede a dois alunos que recolham os enunciados das tarefas dos colegas, enquanto prepara a conclusão da aula.

MOMENTO IV

- A conclusão da aula inclui três aspetos/momentos diferentes:
    - → Legenda da figura da questão 7 da tarefa;
    - → Esclarecimento da diferença entre segmento de círculo menor e segmento de círculo maior;
    - → Levantamento das maiores dificuldades sentidas pelos alunos no uso do Geogebra.

Conclusão	
Dificuldades previstas	Papel professor
Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula.	Devido à dificuldade prevista, a professora deverá fazer com que os alunos tenham um papel o mais ativo possível neste momento da aula. A legenda da figura deverá ser rápida. Ela serve apenas para esclarecer alguma dúvida momentânea pois a tarefa será devolvida a cada aluno com a respetiva correção e feedback. A professora deverá alertar para a importância de dizerem as dificuldades sentidas com o Geogebra para que sejam tidas em conta na próxima aula que planear, com recurso ao programa.

Anexo 20: Plano da aula do dia 6 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	06.mar.2017 Lições 98 e 99	**Ângulos e circunferências** Ângulos, arcos e cordas geometricamente iguais Medida da amplitude de um ângulo ao centro

Sumário
· Continuação da aula anterior: arcos e cordas de circunferências. · Medida da amplitude de um ângulo ao centro. · Resolução de exercícios.
Conteúdos matemáticos
· Elementos da circunferência (ângulo ao centro, arco, corda, extremos de um arco e segmento de círculo) · Amplitude de um ângulo ao centro
Objetivos

- Saber identificar, designar e utilizar corretamente os termos: "ângulo ao centro", "extremos de um arco", "arco de circunferência", "arco menor", "arco maior", "corda", "arco subtenso pela corda …", "arco correspondente pela corda…";
- Reconhecer, numa circunferência ou em circunferências iguais, que cordas e arcos determinados por ângulos ao centro iguais também são iguais e vice-versa;
- Identificar a medida da amplitude de um ângulo ao centro como a «amplitude do arco compreendido entre os seus lados;
- Saber representar simbolicamente a amplitude de um ângulo (^) e de um arco (⌒).

Capacidades transversais

- Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
- Raciocínio matemático

Recursos e Materiais

Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação

- A professora, por observação, fará o registo habitual das participações dos alunos ao longo da aula;
- A professora fará o registo fotográfico das resoluções escritas de alguns alunos;

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	**5 min**	**10h05**
II	· **Introdução** · Revisão da aula anterior (slide 1)	**10 min**	**10h10**
III	· A interpretação gráfica em contexto real da propriedade "**ângulos geometricamente iguais correspondem arcos e cordas geometricamente iguais e vice-versa"** através do GeoGebra	5 min	10h20
	· Estrutura da demonstração da propriedade anterior (slides 2 a 6) · Referência ao manual, p. 80 (slide 7) · Exemplo ângulos verticalmente opostos	5 min	10h25
	· P. 82: 2 (slide 8)	10 min	10h30
IV	· Referência ao manual: **medida ângulo ao centro**, p. 81 (slide 9)	2 min	10h40
	· Exercício em contexto de realidade (slide 10)	8 min	10h42
	· P. 82: 3 (slide 11)	40 min	10h50
V	· Conclusão da aula · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa "Baricentro" · Entrega dos *feedbacks* escritos das fichas diagnóstico · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa "Arcos e cordas"	5	11h30

Desenvolvimento da Aula

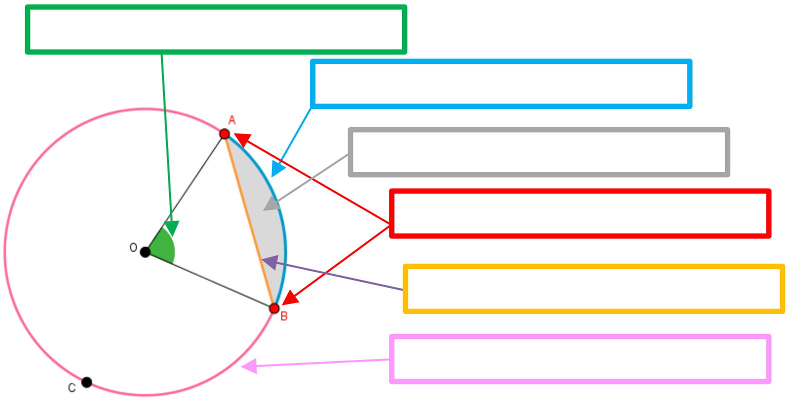
MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de presença e de pontualidade);

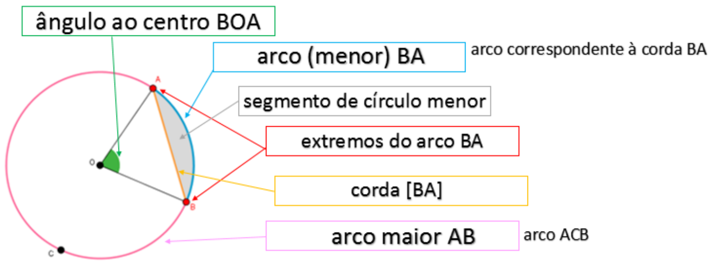
MOMENTO II

- É essencial o domínio das designações associadas aos elementos da circunferência para o prosseguimento no estudo da presente subunidade. A partir da análise das respostas dadas pelos alunos à tarefa da aula anterior, percebe-se que as noções abrangidas não foram totalmente apreendidas.
- Os enunciados da referida tarefa serão entregues aos alunos no final da aula pois, uma vez corrigidas as sua respostas, os alunos teriam a tendência de não dar a importância necessária a este momento de esclarecimento e/ou revisão. Assim, a professora entregará uma nova figura a cada um para registar a correção que farão em turma.

Revisão da aula anterior (legenda da figura)



Hipóteses de resolução:



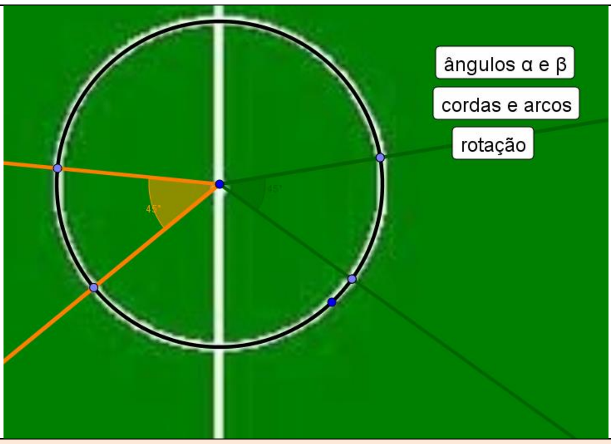
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Os erros mais frequentes na legenda da figura foram os seguintes: · "pontos A e B" ou "pontos [AB]", na vez de "extremos do arco BA"; · "arco maior" ou "arco menor", na vez de "arco menor BA" ou "arco maior AB";	Os alunos já estarão em contacto com esta figura pela terceira vez (a primeira na tarefa e a segunda na conclusão da aula anterior), portanto a professora deverá começar a correção em turma logo de início para que os alunos não desprezem o valor da mesma. À medida que os alunos vão sugerindo a designação a atribuir a	Dos alunos da turma espera-se uma participação ativa na discussão e correção deste exercício proposto na aula anterior.

· "circunferência" ou "círculo" na vez de "arco maior AB"; · "segmento de círculo" na vez de "segmento de círculo menor". O manual adotado faz referência a diversas designações para o mesmo objeto o que pode tornar o processo de aprendizagem dos mesmos num exercício difícil, confuso e até mesmo de pouco interesse para as aprendizagens futuras nesta subunidade.	determinado objeto, a professora deverá sublinhar os erros que foram mais frequentes de forma a captar mais a atenção da turma, ressalvando que a legenda "pontos A e B" não está errada mas não corresponde ao elemento da circunferência que se pretendia. Importa salientar que para um melhor acompanhamento do manual e mesmo para facilitar a construção no Geogebra é vantajoso que se escrevam sempre as letras dos arcos e dos ângulos no sentido anti-horário. Para facilitar a apreensão dos conceitos necessários à continuação do estudo desta subunidade, a professora optará por não dar muita ênfase ao conceito de "arco subtenso".	Após isto, deverão preencher a nova figura entregue nesta aula.

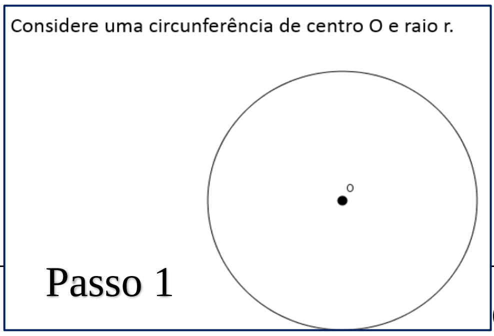
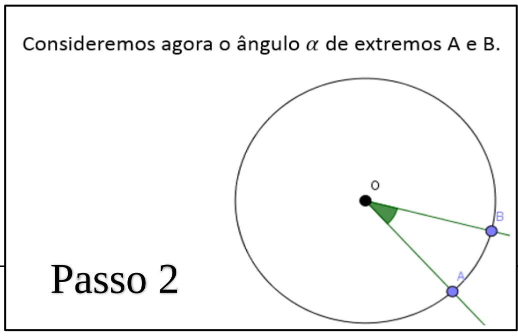
MOMENTO III

- A propriedade que será apresentada de seguida ("Numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais, correspondem cordas e arcos geometricamente iguais"), à partida, seria intuitiva para os alunos. No entanto, a professora pretende, em aula, desenvolver uma simples demonstração gráfica da mesma com vista a revelar e construir com os alunos, os argumentos e/ou processos matemáticos que sustentam e/ou provam esta mesma propriedade.
- Inicialmente, sob um contexto da realidade que promova o interesse dos alunos, recorrer-se-á ao Geogebra para que a turma visualize a rotação aplicada a um dos ângulos, rotação essa que é o argumento principal da demonstração em causa.

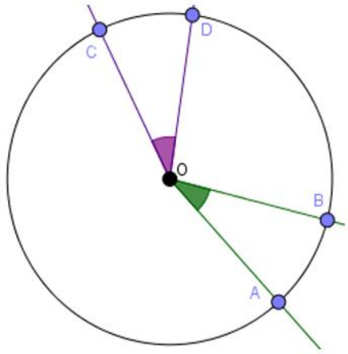
A interpretação gráfica da propriedade através do GeoGebra



Discurso inicial para contextualização da situação: "Imaginem que o treinador desta equipa coloca, durante um treino, dois jogadores no centro do círculo central e pede a cada um que remate dentro de um determinado ângulo (com a mesma amplitude para ambos os jogadores) para fora do círculo. A questão que lanço então é a seguinte: sendo esses ângulos de igual amplitude, isto é, geometricamente iguais, as cordas e os arcos que lhes correspondem serão também geometricamente iguais? Vejamos agora como poderíamos provar matematicamente essa propriedade."		
Dificuldades previstas	**Papel professor**	**Papel aluno**
O contexto e a própria imagem de fundo podem ser fatores distratores na compreensão da situação. A visualização do movimento de rotação do ângulo torna esta demonstração muito clara e por isso não são previstas outras dificuldades.	A professora deverá, ainda que sob o contexto real apresentado e a linguagem própria do mesmo, captar a atenção dos alunos para os aspetos matemáticos em evidência fazendo uso dos conceitos apreendidos e esclarecidos com a primeira tarefa desta aula ("arcos", "cordas" e "ângulo ao centro") e retomando outro já anteriormente abordado ("rotação"). O objetivo principal deste exemplo é facilitar aos alunos a visualização do movimento de rotação, daí que a professora não se deva focar em detalhes da demonstração implícita.	Pelo facto de este contexto de realidade ser alvo do interesse da generalidade dos alunos e também devido aos conceitos necessários para a discussão da situação terem sido anteriormente clarificados, espera-se que a turma responda às interpelações feitas pela docente.

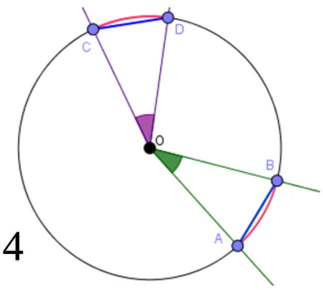
Estrutura da demonstração
 

Fazendo uma rotação, obtemos um ângulo β, geometricamente igual a α e de extremos C e D.



Passo 3

Compare a corda [AB] com a corda [CD]. Compare o arco AB com o arco CD.



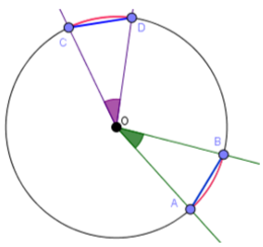
Passo 4

A corda [AB] é geometricamente igual à corda [DC].

O arco AB é geometricamente igual ao arco CD.

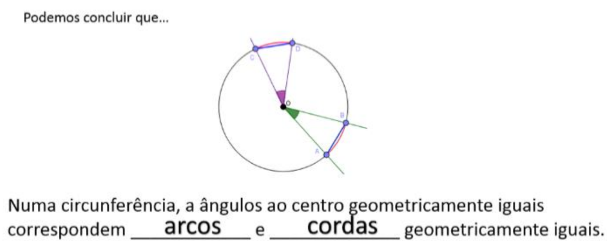
Porque a rotação é uma transformação que preserva as distâncias.

Podemos concluir que…

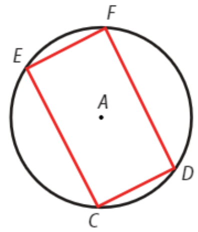


Numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem _____________ e ______________ geometricamente iguais.

Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno

Alguns alunos podem ainda não ter assimilado todos os conceitos enunciados ao longo desta demonstração.	A professora deverá recordar, no passo 4 que as cordas e os arcos são iguais, para além de parecer totalmente visível e intuitivo, deve-se ao facto de a rotação ser uma isometria, ou seja, uma transformação que preserva as distâncias (fazendo referência à questão da ficha diagnóstico adjacente a este conteúdo). A professora deverá dar os espaço e tempo necessários, ainda que a um ritmo bem marcado, para que os alunos possam reconhecer e evidenciar as suas dúvidas relativamente aos conceitos matemáticos em causa.	Os alunos deverão seguir as orientações da professora e responder às questões que surjam neste momento da aula tanto por parte da professora como dos restantes colegas. No último slide (conclusão) é esperado que os alunos completem, sem dificuldade, os  espaços da seguinte forma:

Referência ao manual	
P. 80 Numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem arcos e cordas geometricamente iguais. Do mesmo modo, também é possível provar que: Numa circunferência, a arcos geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro e cordas geometricamente iguais. Numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem ângulos ao centro e arcos geometricamente iguais.	
Papel professor	**Papel aluno**
A professora pedirá aos alunos que sublinhem estas propriedades enunciadas na página 80 do manual, referindo que correspondem às conclusões a que chegaram anteriormente. E que as 2.ª e 3ª propriedades são semelhantes à primeira e que se provam, igualmente, através de uma rotação.	O alunos deverão corresponder à indicação dada pela professora, sublinhando as propriedades apresentadas.

Exercício 2 da página 82 do manual		
2 Na figura pode observar-se o retângulo [*CDFE*], inscrito na circunferência de centro em *A*. O arco *CD* é igual ao arco *FE*? Explica o teu raciocínio.  		
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Os alunos podem revelar dificuldades em aplicar as conclusões anteriores a esta questão, visto que aquelas foram extraídas a partir de situações onde estavam desenhados ângulos o que não acontece nesta figura.	Caso os alunos não consigam perceber o "ponto de partida" para a resolução deste exercício, a professora deverá optar por aconselhar inicialmente a turma a ler novamente a terceira definição sublinhada anteriormente. Posteriormente, mostrar que poderia obter-se a resposta também através de ângulos tal como nas situações anteriores, identificando os ângulos CAD e FAE (que são geometricamente iguais por serem verticalmente opostos).	Espera-se que a partir das indicações dadas pela professora, os alunos consigam desenvolver qualquer um dos raciocínios possíveis para obtenção da resposta.

MOMENTO IV

- A professora deverá anunciar que de seguida se apresenta uma outra propriedade e que esta, por sua vez, não será acompanhada de demonstração.

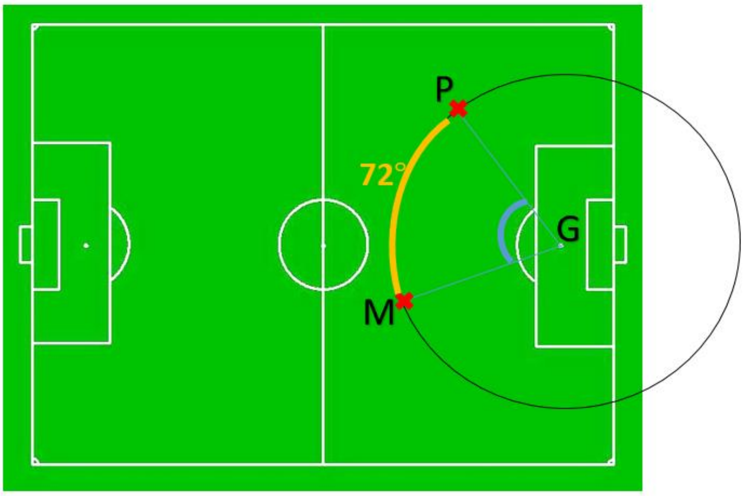
Referência ao manual		
P. 81 **12. Medida da amplitude de um ângulo ao centro** A medida da amplitude de um ângulo ao centro é igual à medida da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. A amplitude de um arco *APB* pode ser representada por $\overset{\frown}{APB}$, ou simplesmente $\overset{\frown}{AB}$, quando se tratar de um arco menor.		
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno

Os alunos poderão manifestar dúvidas relativamente ao termos "arco compreendido entre os seus [do ângulo] lados".	Independentemente de os alunos manifestarem a dificuldade prevista ou não, a professora deverá clarificar o enunciado fazendo um esboço de uma circunferência e de um ângulo ao centro, pedindo aos alunos que expliquem o significado desta propriedade na figura desenhada. De seguida, pede aos alunos que sublinhem essa mesma propriedade. Após isto, explica o simbolismo associado à amplitude de um arco e pede que sublinhem também essa notação.	Os alunos deverão colaborar na explicitação do enunciado sugerida pela professora.

<table>
<tr><th colspan="3">Exercício em contexto de realidade</th></tr>
<tr><td colspan="3">
O guarda-redes vai passar a bola ao jogador M mas para enganar o adversário finge que passará para o jogador P, fazendo um desvio de direção no último momento.

Sabe-se que os jogadores P e M estão sobre a mesma circunferência de centro em G. Sabe-se também o arco PM mede 72°.

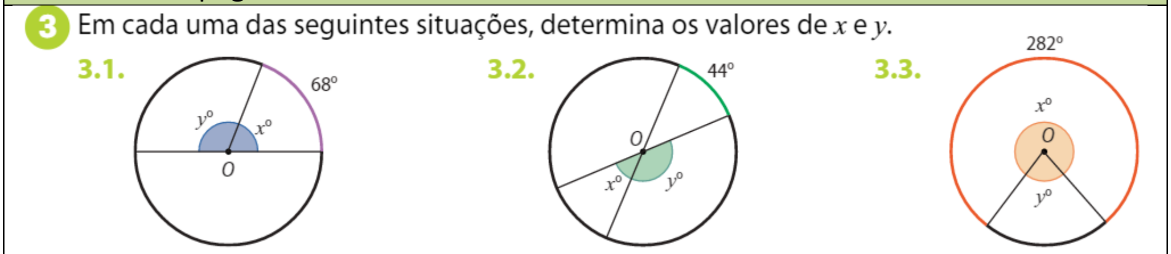
Qual é a amplitude do ângulo "de desvio" que o guarda-redes fará neste passe? Justifique a sua resposta.



</td></tr>
<tr><th>Dificuldades previstas</th><th>Papel professor</th><th>Papel aluno</th></tr>
</table>

Com base na definição anterior, não se esperam dificuldades por parte dos alunos em responder ao que lhes é proposto por este enunciado.	A professora deverá fazer a leitura do enunciado, suspendendo-a em cada parágrafo para verificar se existem dúvidas por parte dos alunos na interpretação do mesmo. Esta questão surge para aplicação direta e quase intuitiva do que foi abordado anteriormente, não sendo pedido aos alunos que façam registo escrito da mesma.	Os alunos deverão recorrer à definição apresentada (e sublinhada) anteriormente para responder à questão.

Exercício 3 da página 82 do manual



Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
De todos os exercícios/situações apresentados na aula, este poderá eventualmente, ser o mais difícil para os alunos devido à quantidade de informação/elementos apresentados e também à presença de incógnitas nas figuras que pode, por vezes, ter um efeito desmotivador para alguns alunos.	Ainda que não esteja escrito no enunciado do exercício, a professora deverá no momento inicial da apresentação do mesmo exigir à turma a justificação das respostas dadas. Informará a turma de que farão a resolução deste exercício em trabalho autónomo e que posteriormente se fará a correção de cada uma das alíneas, sugerindo que se vão apresentando voluntários para escreverem e esclarecerem as suas respostas no quadro para toda a turma.	Os alunos, perante a sugestão a professora, deverão prosseguir com a resolução do exercício de forma autónoma, esclarecendo as eventuais dúvidas individualmente (ou coletivamente aquando da apresentação de uma possível resposta no quadro e clarificação/discussão da mesma).

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, nesta aula, a professora optará por entregar a cada aluno os *feedbacks* escritos das várias tarefas realizadas nas duas últimas aulas.

Anexo 21: Plano da aula do dia 7 de março.

<table>
<tr><th colspan="3">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola
[redacted]</td><td>9.ºF</td><td>Domínio: GM9</td></tr>
<tr><td>07.mar.2017
Lição 100</td><td>Ângulos e circunferências
Propriedades geométricas em circunferências</td></tr>
</table>

Sumário

- Correção do trabalho de casa sobre arcos e cordas de uma circunferência e medida da amplitude de um ângulo ao centro.
- Realização da tarefa "Investigando a circunferência" do manual.
- Resolução de exercícios do manual.

Conteúdos matemáticos

- Elementos da circunferência (ângulo ao centro, arco, corda, extremos de um arco e segmento de círculo)
- Amplitude de um ângulo ao centro
- Mediatriz de um segmento de reta

Objetivos

- Identificar a medida da amplitude de um ângulo ao centro como a amplitude do arco compreendido entre os seus lados;
- Estabelecer relações entre arcos e cordas de uma circunferência;

Capacidades transversais

- Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
- Raciocínio matemático

Recursos e Materiais

Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação

- A professora, por observação, fará o registo das participações dos alunos ao longo da aula;
- A professora fará o registo fotográfico das resoluções escritas de alguns alunos;

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças** · **Registo T.P.C.**	5 min	9h
II	· **Introdução** · Correção do T.P.C. P. 82: 3.3	5 min	9h10
III	· **Tarefa "Investigando a circunferência", p. 21**	20 min	9h15
IV	· P. 83: 6	10 min	9h 35

V	· Conclusão da aula · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa “Baricentro” · Entrega dos *feedbacks* escritos das fichas diagnóstico · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa “Arcos e cordas”	5 min	9h40

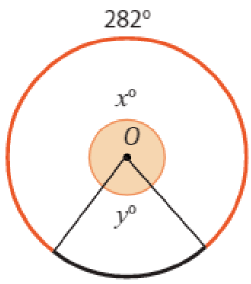
Desenvolvimento da Aula

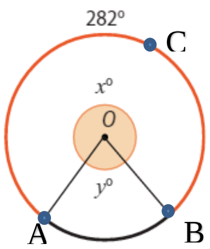
MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);
- Faz-se o registo de quem fez ou não fez o trabalho de casa.

MOMENTO II

- Na aula anterior, na realização dos exercícios 3.1 e 3.2 da página 82 do manual, os alunos mostraram dificuldades em justificar devidamente as suas respostas sem fazer referência a informação desnecessária. Assim, a professora a apresentará uma possível resposta, simples e completa, ao exercício que foi para trabalho de casa.

<table>
<tr><td colspan="3">Correção do trabalho de casa</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.3.
</td></tr>
<tr><td>Dificuldades</td><td>Papel professor</td><td>Papel aluno</td></tr>
<tr><td>Ainda que saibam identificar os elementos de uma circunferência, os alunos mostram alguma dificuldade na construção de justificações semelhantes às pretendidas neste exercício.</td><td>A professora, relembrará a vantagem em nomear alguns pontos na figura que facilitem a identificação de certos elementos da circunferência a que nos referiremos na construção da resposta.

Sugestão de resolução apresentada pela professora:
$x^\circ = 282^\circ$, pois o ângulo BOA é um ângulo ao centro e BCA é o arco compreendido entre os seus lados.
</td><td>O aluno deverá seguir a resolução da professora e responder sempre que lhe for solicitado.

Deverá aproveitar este momento da aula para esclarecer eventuais dúvidas</td></tr>
</table>

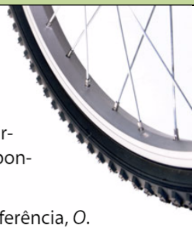
	Como $x° + y° = 360°$ e $x° = 282°$, então $y° = 360° - 282° = 78°$.	relativamente à construção deste tipo de resposta.

MOMENTO III

- Consoante o objetivo a atingir com a tarefa seguinte, ela pode ser implementada de diferentes formas em sala de aula: individualmente, a pares ou em grande grupo (turma). Tendo já os alunos interagido com o software Geogebra e realizando uma construção através do mesmo com base num guião, pretende-se agora que os se centrem na discussão das conclusões que podem retirar de determinada construção no programa. Assim, a construção será executada pela professora em computador próprio e projetada para toda a turma em simultâneo.

Realização da tarefa "Investigando a circunferência"

Parte I



Pretende-se que com uma pequena investigação encontres algumas relações entre arcos e cordas de uma circunferência.

1.º Recorre a um programa de geometria dinâmica para construíres uma circunferência de centro *O*. De seguida, marca sobre a circunferência dois pontos distintos, *A* e *B*, e desenha a corda [*AB*].

2.º Traça uma reta perpendicular à corda [*AB*] que passe no centro da circunferência, *O*.

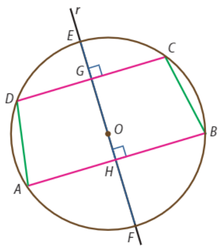
3.º Designa por *H* o ponto que resulta da interseção da corda [*AB*] com a reta perpendicular construída no ponto anterior. Compara os segmentos de reta [*AH*] e [*HB*].

4.º Movimenta o ponto *A* ao longo da circunferência.

1. O que é que os resultados obtidos nesta investigação te levam a admitir?
Atendendo ao conceito de mediatriz, mostra que qualquer reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide a corda em duas partes iguais.

Parte II

5.º Marca sobre a circunferência dois pontos distintos dos anteriores, *C* e *D*, e desenha a corda [*CD*] de modo a que esta seja paralela à corda [*AB*].



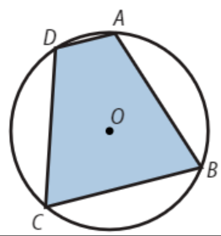
6.º Designa por *H* e por *G* os pontos que resultam, respetivamente, da interseção das cordas [*AB*] e [*DC*] com a reta perpendicular construída no ponto anterior. Compara as cordas [*AD*] e [*BC*].

7.º Compara, também, os arcos *DA* e *BC*.

8.º Movimenta o ponto *A* ao longo da circunferência.

2. O que é que os resultados obtidos nesta investigação te levam a admitir?
Mostra a relação existente entre as cordas [*AD*] e [*BC*] e os respetivos arcos subtensos.

A realização desta tarefa inclui momentos diferentes: → Momento I: construção no Geogebra em turma (1º, 2º, 3º e 4º passos); → Momento II: discussão da questão 1 em pequeno grupo → Momento III: levantamento, em turma, das conclusões retiradas → Momento IV: construção no Geogebra em turma (5º, 6º, 7º e 8º passos); → Momento V : discussão da questão 2 em pequeno grupo → Momento VI: levantamento, em turma, das conclusões retiradas → Momento VII: referência às conclusões pretendidas (página 81 do manual)		
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
A construção no software, pelo que já foi observado em aula anteriores, aparenta ser um processo intuitivo não constituindo uma dificuldade para a generalidade da turma. Os alunos, pelo facto de não ser um exercício habitual em aula, poderão ter maior dificuldade em recolher as informações necessárias e relacioná-las/articulá-las de forma a retirar uma conclusão que seja proveitosa e aplicável ao estudo da subunidade didática.	Ainda que a construção seja efetuada pela professora, deve ser seguida pelas sugestões dos alunos de modo a que a turma acompanhe toda a construção para que posteriormente possa retirar as suas conclusões. No sentido de promover a participação dos alunos, a professora poderá questionar a turma com alguma frequência: "Em que botão devo clicar para fazer o passo seguinte?". Para auxiliar os alunos a retirarem as suas conclusões em grupo, tanto no 4.º passo como no 8.º, ao mover o ponto A, a docente pode fazer alguma observação semelhante a: "Ao movermos o ponto A, a comparação que fizeram no passo anterior (3º e 7º) mantém-se?" No momento VII a professora deverá tentar valorizar as conclusões retiradas pelos grupos e relacioná-las com o que é apontado pelo manual. Devido ao tempo máximo (20 minutos) em que esta tarefa deve ser realizada, a professora deverá garantir que os momentos tanto em turma com em grupo são totalmente aproveitados por todos os alunos.	Nos momentos de construção, os alunos deverão, enquanto membro da turma, responder às interações feitas pela professora. Quando a professora indicar que se segue um momento a pares/grupos, cada aluno deve participar cooperativamente com os restantes elementos do grupo para que posteriormente apresentem a sua "proposta" de conclusão à turma.

Exercício 6 da página 83 do manual		
6 Na figura podemos observar o trapézio [*ABCD*], inscrito na circunferência de centro *O*. Prova que o trapézio apresentado, tal como qualquer trapézio inscrito numa circunferência, é isósceles. 		
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno

Este exercício poderá ser de elevada dificuldade para a maioria dos alunos. Para além de, provavelmente, não saberem as condições necessárias e/ou suficientes para se designar determinado trapézio por isósceles, não lhes parecerá óbvio que é a partir das conclusões retiradas da tarefa anterior que se constrói a prova pretendida.	A professora deverá recordar que um trapézio é um quadrilátero com exclusivamente dois lados paralelos (que se designam de bases) e que um trapézio isósceles é um trapézio cujos lados não paralelos são iguais. Concluindo que "a prova que se pretende é a de que $\overline{DC} = \overline{AB}$, sendo DA∥ CB." A professora deverá dar os espaço e tempo necessários, ainda que a um ritmo bem marcado, ao esclarecimento das possíveis dúvidas que possam permanecer relativamente aos conceitos matemáticos em causa. Sugestão de resolução da professora: "Como [ABCD] é um trapézio, então DA∥ CB. Como cordas compreendidas entre cordas paralelas são geometricamente iguais, então [DC] e [AB] são iguais, logo o trapézio apresentado é isósceles."	Assim que o exercício é proposto, é esperado da parte do aluno que inicie a resolução do mesmo. Chegando o momento estipulado pela professora como fim da realização autónoma do exercício, os alunos deverão dar atenção à correção do mesmo por parte da professora.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos neste últimos minutos da aula. Assim, nesta aula, a professora optará por entregar a cada aluno os *feedbacks* escritos das várias tarefas realizadas nas duas últimas aulas.

Anexo 22: Plano da aula do dia 9 de março.

<table>
<tr><th colspan="3">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola
[redacted]</td><td>9.ºF</td><td>Domínio: GM9</td></tr>
<tr><td>09.mar.2017
Lições 101 e 102</td><td>Ângulos e circunferências
Comprimento de um arco de circunferência e área de um setor circular</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sumário</td></tr>
<tr><td colspan="3">· Correção do trabalho de casa sobre propriedades geométricas em circunferências.
· Comprimento de um arco de circunferência e área de um setor circular.
· Resolução de exercícios do manual.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conteúdos matemáticos</td></tr>
</table>

· Elementos da circunferência (ângulo ao centro, arco, corda, extremos de um arco e segmento de círculo) · Comprimento de um arco (perímetro da circunferência) · Área de um setor circular (área do círculo)	
Objetivos	
· Designar, dada uma circunferência, por «setor circular» a interseção de um ângulo ao centro com o círculo. · Saber que, numa dada circunferência ou em circunferências iguais, o comprimento de um arco de circunferência e a área de um setor circular são diretamente proporcionais à amplitude do respetivo ângulo ao centro.	
Capacidades transversais	
· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma) · Raciocínio matemático	
Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;
Avaliação	
· A professora, por observação, fará o registo das participações dos alunos ao longo da aula; · A professora fará o registo fotográfico das resoluções escritas de alguns alunos;	

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças** · **Registo T.P.C.**	10 min	13h35
II	· **Introdução** · Correção do T.P.C. P. 83: 6	5 min	13h45
III	· **Comprimento do arco "pintado" (slides 2 a 8)**	35 min	13h50
	· **Área do setor circular (slides 9 a 11)**	15 min	
IV	· P. 86: 2	20 min	14h40
V	· Conclusão da aula · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa "Baricentro" · Entrega dos *feedbacks* escritos das fichas diagnóstico · Entrega dos *feedbacks* escritos da tarefa "Arcos e cordas"	5 min	15h

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

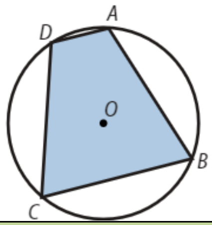
- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);
- Faz-se o registo de quem fez ou não fez o trabalho de casa.

MOMENTO II

- Na aula anterior, não houve espaço/tempo para perceber se os alunos verificam melhorias relativamente às dificuldades em justificar de forma simples e completa as suas respostas. Assim, após ouvir as propostas de resolução de alguns alunos de entre os que se voluntariem para a ler para os restantes colegas, a professora a apresentará uma possível resposta ao exercício que foi para trabalho de casa.

Correção do trabalho de casa

6 Na figura podemos observar o trapézio [*ABCD*], inscrito na circunferência de centro *O*.
Prova que o trapézio apresentado, tal como qualquer trapézio inscrito numa circunferência, é isósceles.



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
A justificação a esta resposta assenta numa propriedade trabalhada na aula anterior a qual, por não ser apresentada numa linguagem simples, pode não ser relembrar pelos alunos.	A professora, relembrará a vantagem de inicialmente fazerem um esboço mental da resposta, isto é, reconhecerem com uma linguagem menos cuidada a propriedade a que farão referência e posteriormente escreverem a resposta estruturada. Sugestão de resolução apresentada pela professora: Como [ABCD] é um trapézio, então $DA \parallel CB$. Como cordas compreendidas entre cordas paralelas são geometricamente iguais, então [DC] e [AB] são iguais, logo o trapézio apresentado é isósceles.	O aluno deverá, inicialmente, disponibilizar-se para ler a sua resposta para toda a turma e posteriormente seguir a resolução da professora, respondendo sempre que lhe for solicitado.

MOMENTO III

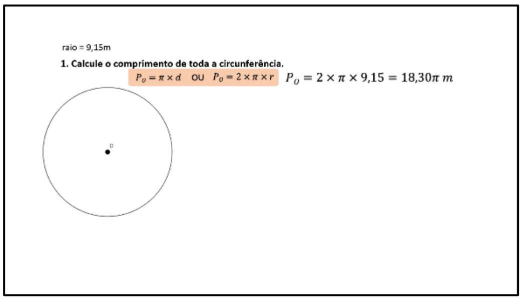
- A “regra 3 simples” é muitas vezes recorrida pelos alunos sem os mesmos refletirem previamente se a podem aplicar perante a situação em causa. O momento seguinte pretende explicar aos alunos dois possíveis raciocínios a adotar quando se procura determinar tanto o comprimento de um arco de circunferência como da área de um setor circular, de modo a que os alunos não se fixem na “regra 3 simples” e que, em simultâneo, percebam o porquê de a poderem aplicar no cálculo destes comprimentos ou áreas.
- Em simultâneo, procura-se que o aluno experimente o processo de generalização, isto é, partindo de um caso particular, formular generalizações que possam ser aplicadas em qualquer outra situação semelhante.

Comprimento do arco “pintado” no círculo central

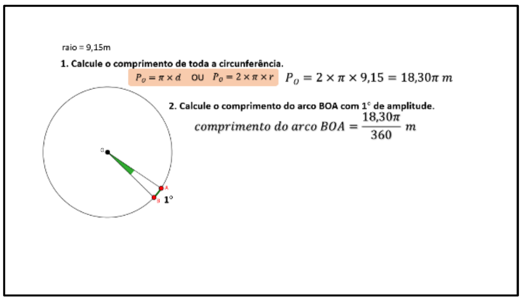
Slide 2: Explicitação da situação da realidade

Slide 3: Primeira questão

Professora: "[slide 2] Ao marcar a linha do círculo central, houve uma avaria na máquina de pintar. [slide 3] O arco que foi pintado corresponde a um ângulo ao centro com 147° de amplitude. O raio do círculo central é de 9,15 metros. Assim, quantos metros do círculo central já foram pintados? O resultado deverá ser apresentado com um arredondamento às centésimas do metro."

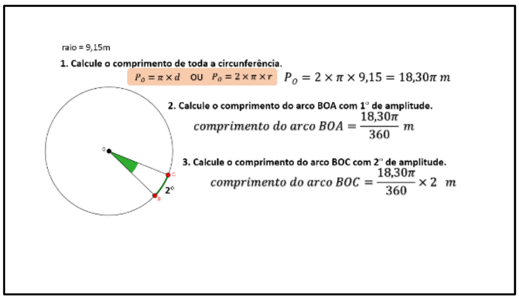


Slide 4 (I): Comprimento da circunferência

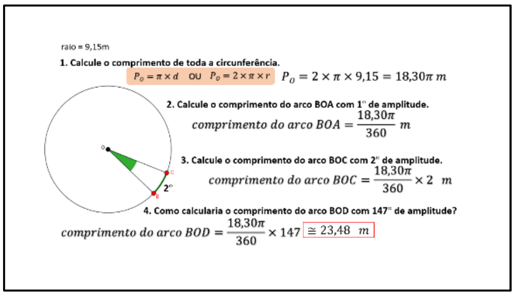


Slide 4 (II): Arco de circunferência (1°)

Professora: "[slide 4 (I)] Se nos pedissem o comprimento de toda circunferência como calcularíamos? [slide 4 (II)] E se nos pedissem o do arco correspondente a um ângulo ao centro com 1° de amplitude?"

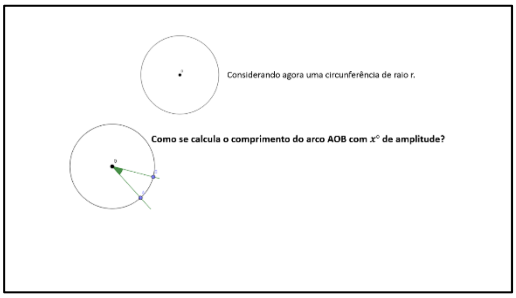


Slide 4 (III): Arco de circunferência (2°)

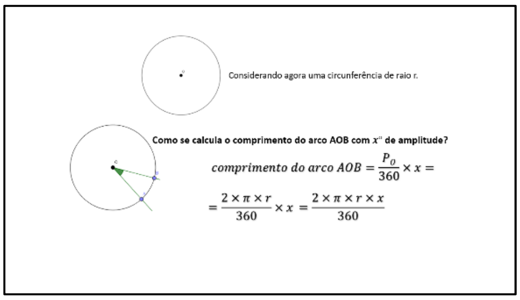


Slide 4 (IV): Arco de circunferência (147°)

Professora: "[slide 4 (III)] E para calcular o comprimento do arco correspondente a um ângulo ao centro com 2° de amplitude? [slide 4 (IV)] Podemos então calcular o comprimento do arco pintado, isto é, do arco correspondente a um ângulo ao centro com 147° de amplitude? E se nos pedissem para um ângulo com outra qualquer amplitude?"

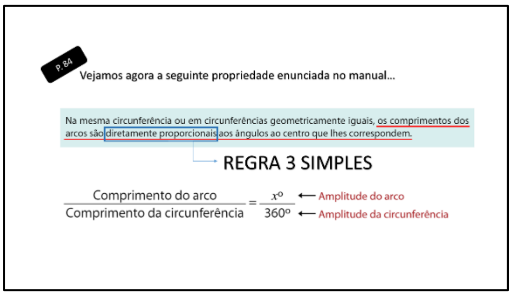


Slide 5 (I): Enunciado para a generalização

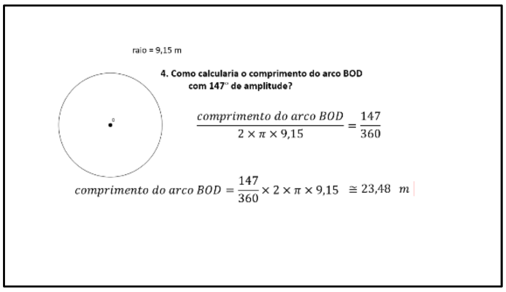


Slide 5 (II): Generalização

Professora: "[slide 5 (I)] Temos trabalhado numa circunferência com um raio conhecido (9,15 m). Se considerarmos agora uma circunferência de raio r, como calcularemos o comprimento de um arco com $x°$ de amplitude? [slide 5 (II)] Temos então a expressão geral para o cálculo do comprimento de qualquer arco com determinada amplitude de uma circunferência com qualquer raio."



Slide 6: Regra 3 simples



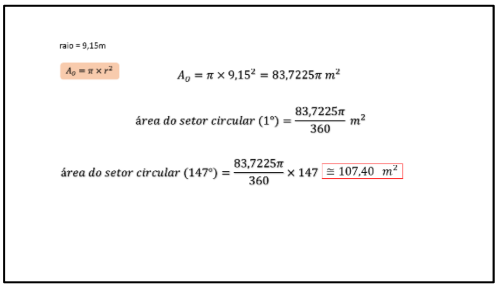
Slide 7: Aplicação da regra 3 simples

Professora: "[slide 6] A propósito deste assunto, no vosso manual está enunciada uma propriedade que aponta o facto de a amplitude de um ângulo ao centro e o comprimento do arco que lhe corresponde serem grandezas diretamente proporcionais. Por haver esta proporcionalidade nós podemos recorrer a uma regra que vocês tão bem conhecem. Qual é? Sublinhem então esta propriedade no vosso manual. [slide 7] De que modo aplicamos a regra 3 simples à situação ca pintura do círculo central?"

Posteriormente apresenta o slide 8 que mostra a resposta final (já arredondada às centésimas) à primeira questão.

Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
A construção do próprio conhecimento através do processo de generalização não é um procedimento habitual em sala de aula para estes alunos. Os alunos, em aulas anteriores a esta subunidade, mostram a tendência para	A professora deverá estar atenta aos momentos em que os alunos não conseguem antecipar o passo seguinte e nessa situação intervir de modo a que, sem apresentar diretamente o facto que se segue, consiga ajudar os alunos a conjeturarem acerca do prosseguimento da resolução para conseguirem responder à questão inicial proposta no slide 3. Importa ressalvar que quando é pedido um valor aproximado, deve ser mantido o valor exato nos passos intermédios e só no fim realizar esse mesmo arredondamento (a menos que	Pelo facto de este contexto de realidade ser alvo do interesse da generalidade dos alunos e também sob a orientação da docente, espera-se que a turma responda às interpelações feitas pela professora, sendo esperada dos alunos da turma uma participação ativa ao longo da resolução e discussão simultâneas

arredondar os resultados em passos intermédios.	seja referido "arredonde os resultados intermédios a x casas decimais", por exemplo).	dos procedimentos a efetuar.

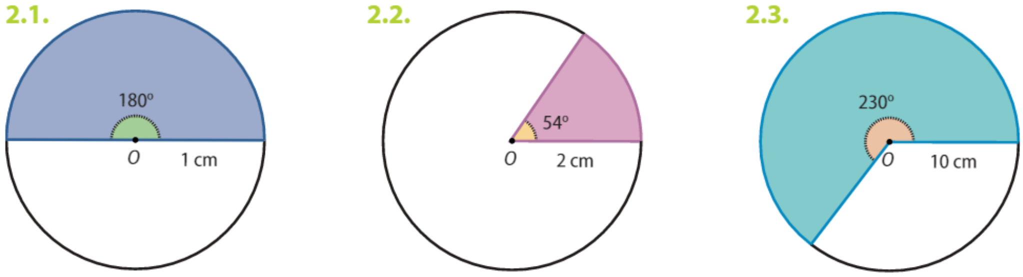
Área do setor circular	
	
Slide 9: Segunda questão	Slide 10: Resposta à questão.

Professora: "[slide 9] Pergunto agora, qual a área do setor circular associado ao arco pintado. Mas antes disso, importa verificar se sabem o que é um setor circular… Pela figura, conseguem perceber o que é? Setor circular é a interseção de um ângulo ao centro com o círculo. Reparem que é diferente de arco, pois o arco é a interseção do ângulo ao centro com a circunferência. De que forma, então poderemos descobrir a área do setor circular? [slide 10] É então um processo muito semelhante ao anterior com a diferença de que agora não se calcula o comprimento da circunferência mas sim a área do círculo."
Posteriormente apresenta o slide 11 que mostra a resposta final (já arredondada às centésimas) à segunda questão e de seguida interpela novamente a turma "Se eu vos disser que a amplitude do ângulo ao centro e a área do setor circular que lhe corresponde são também grandezas diretamente proporcionais, isso significa …? Sublinhem então essa propriedade na página 84 do manual (terceiro retângulo verde)."

Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Partindo do slide 9, pode não ser intuitivo para os alunos reconhecer que o raciocínio a desenvolver para responder a esta segunda questão é muito semelhante ao anterior.	Antes de apresentar o slide 10, a professora deve não só esclarecer o significado do conceito "setor circular" (ainda que os alunos o tenham estudado no sexto ano), como também levar os alunos a recorrerem ao raciocínio que estabeleceram anteriormente para responder à primeira questão.	Espera-se que, perante o estímulo da professora, os alunos consigam relacionar o que se pretendia com a questão 1 com que se procura com a questão 2 e o modo como os raciocínio utilizados nas respostas a cada uma delas se assemelham também.

Exercício 6 da página 83 do manual

2 De acordo com os dados fornecidos, determina o comprimento do arco de circunferência colorido e a área do setor circular realçado em cada uma das seguintes circunferências.



Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Visto que, no momento anterior, tanto na resposta à questão 1 como à 2, se utilizaram dois raciocínios diferentes (produto da amplitude pelo comprimento do arco/área do setor circular correspondente ao ângulo de 1° de amplitude ou regra 3 simples), os alunos podem confundir as diferentes resoluções e até, porventura, incluir ambas na mesma resposta. Cada alínea exige o comprimento do arco de circunferência e a área do setor circular, e assim os alunos podem revelar dificuldades em organizar devidamente a resposta.	Para que os alunos não recorram somente a um dos processos utilizados, a professora sugere que as duas primeiras alíneas (2.1 e 2.2) sejam respondidas com recurso ao primeiro raciocínio estabelecido (produto da amplitude pelo comprimento do arco/área do setor circular correspondente ao ângulo de 1° de amplitude) e a terceira seja realizada através da regra 3 simples. A professora pode sugerir que, para uma melhor organização das respostas, estruturem e escrevam o raciocínio da seguinte forma: 2.1. → Comprimento do arco de circunferência: (apresentam o raciocínio/resposta) → Área do setor circular (apresentam o raciocínio/resposta) De igual forma organizam as respostas às alíneas 2.2 e 2.3.	Após a sugestão inicial dada pela professora (acerca da estruturação da resposta), espera-se que os alunos iniciem a resolução da tarefa proposta de forma autónoma e/ou a pares. E que gradualmente, como é hábito, se disponibilizem para apresentar e explicar a sua resposta no quadro para toda a turma.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos neste últimos minutos da aula. Assim, nesta aula, a professora optará por entregar a cada aluno os *feedbacks* escritos das várias tarefas realizadas nas duas últimas aulas.

Anexo 23: Plano da aula do dia 13 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	13.mar.2017 Lições 103 e 104	**Ângulos e circunferências** Ângulos inscritos em circunferências

Sumário

- Ângulos inscritos em circunferências.
- Resolução de exercícios do manual.

Conteúdos matemáticos

- Elementos da circunferência (ângulo ao centro, ângulo inscrito, arco, extremos de um arco)
- Amplitude de um ângulo ao centro, de um ângulo inscrito e de um arco

Objetivos

- Designar por «ângulo inscrito» num arco de circunferência qualquer ângulo de vértice no arco e distinto dos extremos e com lados passando por eles;
- Saber que a amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados e, como corolários, que ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma amplitude e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

Capacidades transversais

- Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
- Raciocínio matemático

Recursos e Materiais

Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação

- A professora, por observação, fará o registo das participações dos alunos ao longo da aula;
- A professora fará o registo fotográfico das resoluções escritas de alguns alunos;

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	10 min	10h05
II	· **Teoria (incluindo exemplos) de “ângulo inscrito”** (slides 1 a 6)	20 min	10h15
III	· Exercícios realizados em turma: P. 86: 3 P. 90: 2	15 min	10h35
IV	· Recolha dos exercícios para *feedback* · Trabalho autónomo CA_P. 56: 11 P. 105: 9 P. 104: 4	40 min	10h50
V	· Conclusão da aula · Capítulos abrangidos no teste: Probabilidade; Equações; Funções; Geometria. · Lista de exercícios de revisão (corrigidos na aula seguinte)	5 min	11h30

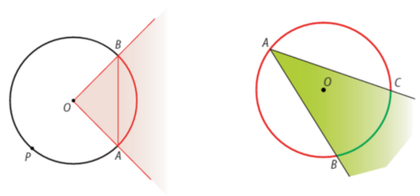
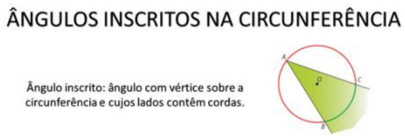
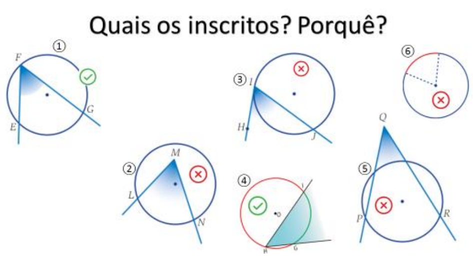
Desenvolvimento da Aula

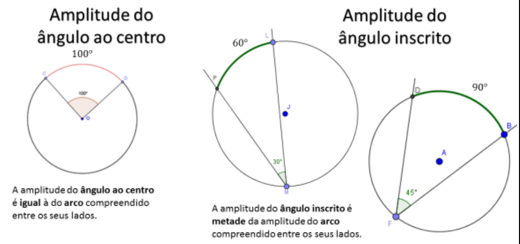
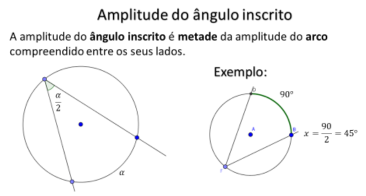
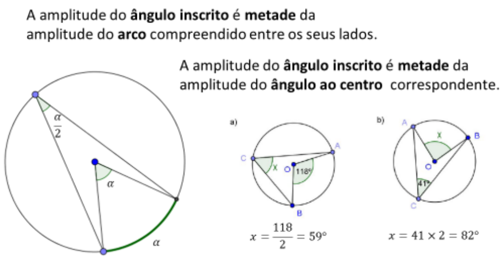
MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);

MOMENTO II

- Este momento da aula destina-se à apresentação dos aspetos teóricos associados aos conteúdos abordados, incluindo frações de tempo destinadas às observações/intervenções por parte dos alunos que conduzam às conclusões pretendidas.

Teoria e exemplos simples acerca de "ângulos inscritos na circunferência"	
 Slide 1	Inicialmente, apenas com a imagem do ângulo ao centro (esquerda). Professora: "Que nome damos a este tipo de ângulo? Porquê? Que outros elementos da circunferência conseguem identificar para além do ângulo ao centro?" [Caso os alunos não saibam responder instantaneamente, aponta para a corda e para o arco] Revela-se a imagem do ângulo inscrito (direita). Professora: "Este ângulo é diferente. Qual é a principal diferença que observam? De facto, estes ângulos que têm o vértice sobre a circunferência. Vamos ver a designação que se dá a este tipo de ângulos…"
 Slide 2	Professora: "Assim percebemos que existe ainda outra exigência para que se chame de ângulo inscrito: os lados contêm cordas da circunferência. Ou seja, qualquer lado do ângulo tem de intersetar a circunferência em dois pontos, sendo que um deles é o vértice do ângulo." A professora pede aos alunos que escrevam o título e a definição no caderno.
 Slide 3	Professora: "Então, pela ordem em que estão indicadas as imagens, vão dizer-me se é ou não inscrito e porquê." À medida que os alunos respondem e após apresentarem breves justificações, a professora fará surgir os símbolos  ou , dando a entender que o primeiro símbolo é adicionado às imagens que representam ângulos inscritos e o segundo aos que não o são.

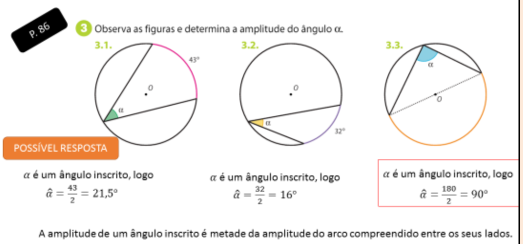
 Slide 4	Inicialmente, apenas com os títulos (à esquerda e à direita) e imagem do lado esquerdo. Professora: "O que sabem relativamente à amplitude de um ângulo ao centro comparativamente à amplitude do arco compreendido entre os seus lados?" Revela-se a definição abaixo da imagem à esquerda. Posteriormente, apresenta as imagens à direita e pede-lhes que relacionem as amplitudes dos ângulos inscritos com a dos arcos compreendidos entre os seus lados. [Caso os alunos não respondam instantaneamente, a professora deve relacionar primeiro as amplitudes da primeira imagem à direita e posteriormente relacionar as da segunda, devendo chegar-se à conclusão que é apresentada abaixo das referidas imagens].
 Slide 5	Apresentando-se novamente a conclusão a que chegaram no slide anterior, a professora pedirá aos alunos que a transcrevam para o caderno diário e que façam também um esboço da imagem. Revela-se o enunciado do exemplo. Professora: "Com base nesta relação, qual será a amplitude do ângulo BFD?" Faz-se surgir a resposta ao exercício.
 Slide 6	Apresentam-se a propriedade já enunciada e a imagem à esquerda. Professora: "Sendo a amplitude do arco igual a α, sabem que a amplitude do ângulo inscrito é $\frac{\alpha}{2}$. E qual será a amplitude deste (apontando) ângulo ao centro? Assim, podemos retirar uma outra conclusão." A professora apresenta a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e do ângulo ao centro correspondente e pede aos alunos que a transcrevam. Revela-se o enunciado dos exemplos. A resposta a cada uma das alíneas é discutida verbalmente em turma e posteriormente apresentada. [Relativamente à alínea b, pode ser necessário que a professora explique que se a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente, então a amplitude do ângulo ao centro é o dobro da do ângulo inscrito].

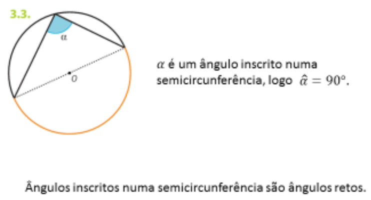
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno

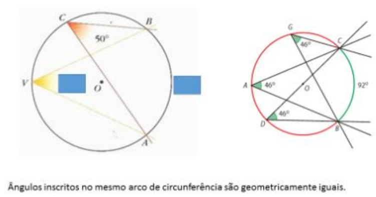
As dificuldades dos alunos esperadas e o papel do professor perante as mesmas foram explícitas entre [ ] na descrição de cada slide.	Este momento da aula será orientado pela professora dando espaço a intervenções pontuais e breves dos alunos. Assim, importa que a professora assuma a gestão das participações dos alunos e imprima um ritmo bastante marcado para que haja tempo suficiente nesta aula destinado à resolução de exercícios.	Os alunos deverão seguir a apresentação teórica dos conteúdos, respondendo às interpelações que lhes forem dirigidas pela professora. Quando a professora o indicar, o aluno deverá transcrever ou esboçar os aspetos que forem apontados pela docente.

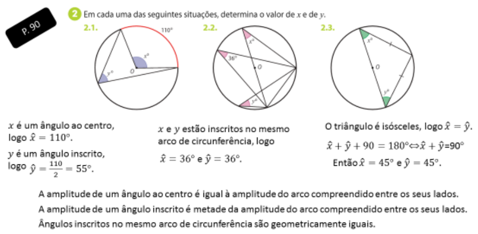
MOMENTO III

- O momento que se segue pretende suscitar a discussão de problemas em turma, esclarecer as eventuais dúvidas e, em simultâneo, apresentar aos alunos algumas hipóteses de respostas completas às questões enunciadas.

Exercícios realizados em turma	
 Slide 7	Após apresentar o enunciado, a professora deverá levar a turma a responder, sequencialmente, a cada uma das questões. Os alunos, à partida, não apresentarão a justificação para os cálculos que efetuarem pois o enunciado da questão não o exige. Assim, a professora deverá, na primeira alínea, pedir aos que fundamentem a resposta dada sendo que para as restantes alíneas a justificação é a mesma. Esclarecer que em situação de teste ou exame, se fosse um exercício isolado deveriam justificar devidamente, neste caso optou-se por fazer desta forma (abranger três alíneas pela mesma justificação) por uma questão de gestão de tempo em aula. As respostas devem surgir à medida que os alunos as constroem verbalmente. É pedido aos alunos que transcrevam as respostas para o caderno diário. Antecipando e estabelecendo a relação com o slide seguinte, deverá referir-se que “a última alínea pode ser justificada de outra forma que é apresentada de seguida”.

<table>
<tr>
<td>

Slide 8</td>
<td>Professora: “Reparem que não vos foi indicada a amplitude do arco a laranja, mas vocês reconheceram que é de 180°. Neste caso diz-se que o ângulo está inscrito numa semicircunferência e pode ser essa a justificação que apresentamos na nossa resposta.” Após isto apresenta a resposta e a propriedade associada, pedindo aos alunos que passem para o caderno esta outra hipótese de resposta.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Slide 9</td>
<td>Inicialmente, apenas com a imagem do lado esquerdo.
Professora: “Através do que é apresentado na figura, qual é a amplitude do arco AB e do ângulo AVB?” [Caso os alunos não saibam qual a amplitude que descobrem primeiro, a professora poderá repartir a questão anterior, perguntando primeiro qual a amplitude do arco AB e após os alunos responderem, sugerir que calculem agora a amplitude do ângulo AVB.]
Em seguida, apresentar-se-á a propriedade e pede-se aos alunos que explicitem a situação representada na imagem do lado direito.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Slide 10</td>
<td>Após apresentar o enunciado, a professora deverá levar a turma a responder, sequencialmente, a cada uma das questões. As respostas (e as respetivas justificações) devem surgir à medida que os alunos as constroem verbalmente.
É pedido aos alunos que transcrevam as respostas para o caderno diário.</td>
</tr>
</table>

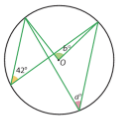
Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Pelo facto de se apresentarem estruturadas as resoluções às questões, os alunos poderão ter alguma dificuldade em ver como estas surgem pela ausência tanto da construção gradual das mesmas como da interação entre a linguagem escrita e oral.	A professora deverá articular o que é dito com o que vai sendo apresentado gradualmente. Deve referir que o objetivo é ajudar os alunos a estruturarem uma resposta a partir do raciocínio ou das ideias que vão desenvolvendo para que posteriormente o consigam fazer em trabalho autónomo individualmente ou em díade.	Os alunos deverão ter uma participação ativa tanto na explicitação do seu raciocínio inicial perante determinado enunciado como também na posterior organização e estruturação da resposta.

MOMENTO IV

Trabalho autónomo dos alunos

CA_P. 56

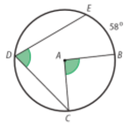
11 Na figura está representada uma circunferência de centro *O*.



Determina a amplitude dos ângulos *a* e *b*. Justifica a tua resposta.

P. 105

9 Observa a figura onde está representada uma circunferência de centro *A*.
Sabendo que $C\hat{D}E = 75°$ e $\overset{\frown}{BE} = 58°$, determina a amplitude do ângulo *CAB*.

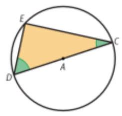


P. 104

4 Na figura está representada uma circunferência de centro *A*.

4.1. Sabendo que [*DC*] é um diâmetro da circunferência, justifica que $C\hat{D}E + E\hat{C}D = 90°$.

4.2. Se $\overset{\frown}{ED} = 70°$, determina a amplitude, em graus, do ângulo *CDE*. Justifica a tua resposta.



Dificuldades previstas	Papel professor	Papel aluno
Mesmo após o momento de aula anterior os alunos podem manifestar alguma dificuldade em estruturar as suas respostas visto que é um processo habitualmente difícil para a turma.	A professora deverá circular pela sala no sentido de auxiliar os alunos caso se deparem com a dificuldade prevista. O acompanhamento das resoluções dos alunos tem também em vista a identificação das respostas que deverão ser apresentadas e explicadas à turma pelos alunos que as contruíram.	Procura-se que o aluno desenvolva um trabalho autónomo e ativo. Por norma, os alunos voluntariam-se para apresentarem a sua resposta à turma onde é levado a explicar a mesma aos restantes colegas.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos neste últimos minutos da aula. Assim, nesta aula, a professora optará por referir os capítulos que serão abrangidos no teste e quais os exercícios que deverão resolver em casa para que na aula seguinte apresentem as dúvidas ou dificuldades que tenham sentido na resolução dos mesmos.
- Lista de exercícios:
  - CA_p. 55: 6
  - P. 87: 5
  - CA_p. 61: 26
  - CA_P. 11: 14
  - CA_p. 25: 6
  - CA_p. 26: 8
  - CA_p. 37: 6

Anexo 24: Plano da aula do dia 20 de março.

<table>
<tr><th colspan="3">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola [redacted]</td><td>9.ºF</td><td>Domínio: GM9</td></tr>
<tr><td>20.mar.2017
Lições 108 e 109</td><td>Ângulos e Circunferências
Ângulos excêntricos</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Sumário</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Realização da tarefa “Ângulos excêntricos” do manual.
· Resolução de exercícios do manual.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conteúdos matemáticos</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Retas exterior, secante e tangente a uma circunferência
· Elementos da circunferência (ângulo ao centro, ângulo inscrito, ângulo excêntrico)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Objetivos</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Saber identificar e distinguir ângulos ao centro de ângulos excêntricos;
· Reconhecer que ângulos inscritos são (um caso particular de) ângulos excêntricos;
· Saber que a amplitude de um ângulo convexo de vértice no interior de um círculo é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto;
· Saber que a amplitude de um ângulo de vértice exterior a um círculo e cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respetivos lados;</td></tr>
<tr><th colspan="2">Capacidades transversais</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
· Raciocínio matemático</td></tr>
<tr><th colspan="2">Recursos e Materiais</th></tr>
<tr><th>Do professor</th><th>Do aluno</th></tr>
<tr><td>· Planificação da aula;
· Ficheiro Geogebra;
· Manual e Caderno de Atividades;
· Quadro e canetas para quadro;</td><td>· Manual e Caderno de Atividades;
· Lápis, caneta e borracha;</td></tr>
<tr><th colspan="2">Avaliação</th></tr>
<tr><td colspan="2">· A professora, por observação, fará o registo das participações dos alunos ao longo da aula;
· A professora fará o registo fotográfico das resoluções escritas de alguns alunos;</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Momentos da aula</th><th>duração</th><th>início</th></tr>
<tr><td>I</td><td>· Sumário
· Faltas/presenças</td><td>5 min</td><td>10h05</td></tr>
<tr><td>II</td><td>· Introdução</td><td>10 min</td><td>10h10</td></tr>
<tr><td>III</td><td>· Tarefa “Ângulos excêntricos”, p. 24
Parte I; Discussão em díade; Discussão em turma; Conclusão.
Parte II; Discussão em díade; Discussão em turma; Conclusão.</td><td>40 min</td><td>10h20</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>· Resolução de exercícios
P. 94: 2
P. 94: 3
P. 95: 5</td><td>33 min</td><td>11h00</td></tr>
</table>

V	· Conclusão da aula	2 min	11h33

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- Os sumários (desta e da aula anterior) serão escritos pela professora no quadro;
  Da aula anterior:
  Lições n.ºs 106 e 107
  2017.03.16
  Sumário: Realização do teste de avaliação.
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);

MOMENTO II

- Pedindo inicialmente aos alunos que abram o manual na página 24, a professora fará em simultâneo uma breve abordagem aos conteúdos aferidos na aula anterior, certificando-se de que os alunos têm presente a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e a amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Após isso prosseguirá com a resolução da tarefa.

<table>
<tr><td colspan="3">Definição e esclarecimento do conceito “ângulo excêntrico”</td></tr>
<tr><td colspan="3">

TAREFA 11 Ângulos excêntricos

Um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência chama-se ângulo ao centro. Quando o vértice não se encontra no centro da circunferência, o ângulo diz-se **excêntrico**.

Mediante a posição do vértice, podem distinguir-se três tipos de ângulos excêntricos: os ângulos inscritos numa circunferência, os ângulos com o vértice no interior de uma circunferência e os ângulos com o vértice no exterior de uma circunferência.

Em aulas anteriores, já relacionaste a amplitude de um ângulo inscrito com a amplitude do arco correspondente. Vejamos, agora, se existe alguma relação entre a amplitude dos restantes ângulos excêntricos e as amplitudes dos arcos que lhes correspondem.

</td></tr>
<tr><td>Dificuldades</td><td>Papel professor</td><td>Papel aluno</td></tr>
<tr><td>Uma vez lida a definição de ângulo excêntrico, os alunos podem ter dificuldade em organizar mentalmente o esquema concetual dos termos apreendidos nas aulas anteriores com o que é apresentado na</td><td>Caso se os alunos manifestem dúvidas que verifiquem a dificuldade prevista, a professora deverá prosseguir para a leitura do parágrafo seguinte de modo a que os alunos consigam, após isso, clarificar e responder em pequena discussão de turma à questão apresentada. Deverá, de seguida, elaborar em conjunto com a turma um esboço de um esquema semelhante ao que se segue:</td><td>O aluno deverá aproveitar o momento/espaço dado para esclarecer as suas eventuais dúvidas relativamente à definição apresentada e/ou a sua relação com os conceitos</td></tr>
</table>

definição em causa. A esta dificuldade podem ser associadas duas causas distintintas: · Os conceitos de ângulo ao centro e de ângulo inscrito e/ou as respetivas definições podem não estar devidamente apreendidos e dessa forma a apresentação de um novo conceito acrescentará um novo elemento a definir e reconhecer; · Caso o conceito de ângulo inscrito esteja compreendido, os alunos poderão deparar-se com a questão "o ângulo inscrito não tem vértice no centro da circunferência, logo, por esta definição deveria designar-se por ângulo excêntrico".	Ângulo ao centro: Ângulo com vértice no centro da circunferência Ângulo com vértice no interior da circunferência Ângulo excêntrico: Ângulos com vértice na circunferência (ângulos inscritos) Ângulos com vértice no exterior da circunferência Após a construção do esquema anterior, a professora deve sublinhar que embora o ângulo inscrito seja um caso particular de um ângulo excêntrico, em contexto de sala de aula, para se fazer referência a um ângulo inscrito recorre-se a esta mesma designação. Após este esclarecimento, a professora pede aos alunos que escrevam o título "Ângulos excêntricos" e passem a definição apresentada na página do manual. Seguidamente, a docente prossegue para a leitura do 3.º parágrafo da tarefa, relacionando o que foi esquematizado anteriormente com o que será estudado/abordado de seguida.	indiretamente relacionados com mesma e abordados em aulas anteriores. Cada aluno deverá fazer a transcrição da definição em causa sem a necessidade de registar o esquema construído.

MOMENTO III

- A realização da tarefa seguirá umas metodologia e sequência próprias e já anteriormente implementada nesta turma, tendo por base três momentos em cada uma das partes (I e II) da tarefa:
  - → Apresentação à turma da construção no Geogebra (e clarificação dos elementos em evidência);
  - → Leitura, interpretação e resposta à questão 1 ou 4 (conforme seja a Parte I ou a Parte II) em turma;

→ Leitura, interpretação e resposta à questão 2 ou 5 (conforme seja a Parte I ou a Parte II) em turma;

→ Leitura e interpretação da questão 3 ou 6 (conforme seja a Parte I ou a Parte II) em turma;

→ Discussão de resultados e registo de conclusões em díade;

→ Levantamento e discussão, em turma, das conclusões retiradas pelos pares;

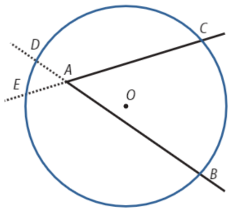
→ Construção de conclusões em turma.

- O objetivo principal desta tarefa é levar os alunos a retirarem conclusões acerca da relação entre a amplitude de um ângulo excêntrico com a amplitude dos arcos associados através da manipulação geométrica possível de realizar no GeoGebra.

Partes I e II da tarefa

Parte I

Recorre a um programa de geometria dinâmica para construíres o ângulo excêntrico *BAC*, com o vértice no interior de uma circunferência de centro *O*. Prolonga os lados do ângulo e assinala os pontos *D* e *E*, pontos de interseção desses prolongamentos com a circunferência, tal como a figura sugere. Por fim, desenha o segmento de reta [*DC*].



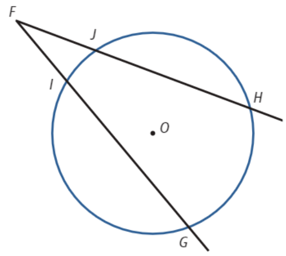
1. Determina a medida das amplitudes dos ângulos *BDC*, *DCE* e *BAC*.

2. Considera os ângulos *BDC* e *DCE*. Determina a soma das amplitudes dos arcos correspondentes.

3. Movimenta, dentro da circunferência, o vértice do ângulo excêntrico para posições diferentes, obtendo assim novos ângulos excêntricos. Encontras alguma relação entre a soma das amplitudes dos arcos *BC* e *DE* e a amplitude do ângulo excêntrico considerado? Qual?

Parte II

Continuando a utilizar um programa de geometria dinâmica, constrói o ângulo excêntrico *GFH*, com o vértice no exterior de uma circunferência de centro *O*. Assinala os pontos *I* e *J*, pontos de interseção das semirretas que formam o ângulo com a circunferência, tal como a figura sugere. Desenha o segmento de reta [*IH*].



4. Determina as amplitudes dos ângulos *JHI*, *GIH* e *GFH*.

5. Determina a diferença entre a amplitude do arco *GH* e a amplitude do arco *JI*.

6. Movimenta, no exterior da circunferência, o vértice do ângulo excêntrico para posições diferentes, obtendo assim novos ângulos excêntricos. Encontras alguma relação entre a diferença encontrada na questão anterior e a amplitude do ângulo excêntrico considerado? Qual?

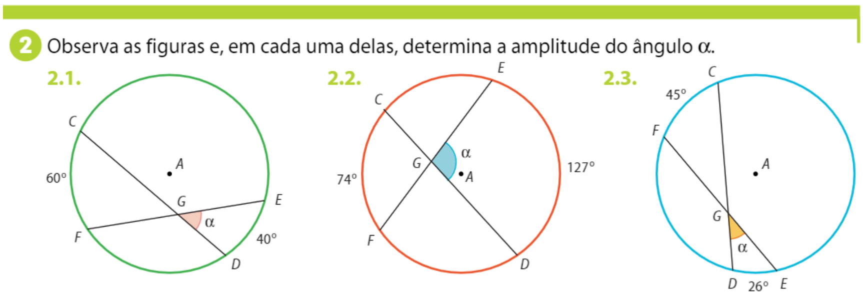
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
A metodologia utilizada na realização desta tarefa foi já implementada nesta turma, a qual não acarretou dúvidas acerca do	As construções requeridas deverão já estar construídas antes da aula, de modo a que as respostas às questões 1 e 4 sejam retiradas através de simples observação. As questões 2 e 5 devem ser realizadas também no *software*, pois aquando da movimentação do vértice do ângulo excêntrico (questões 3 e 6) os valores são automaticamente	Inicialmente, os alunos deverão participar da manipulação no *software* e, posteriormente, em díade deverão discutir os resultados obtidos de forma a chegarem e conseguirem construir conclusões que posteriormente explicarão aos restantes colegas.

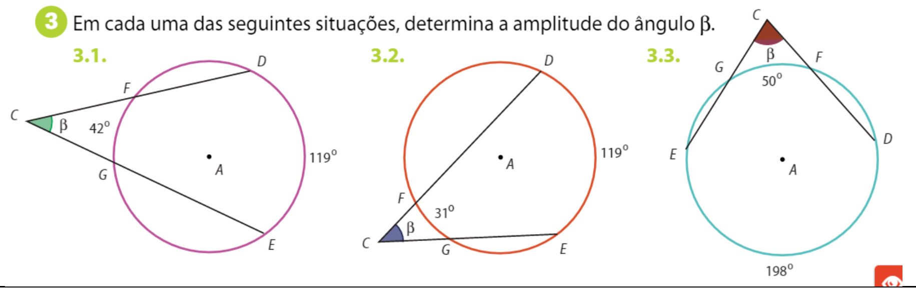
funcionamento/ desenvolvimento da mesma. A turma poderá ter alguma dificuldade em responder às questões 3 e 6 em díade visto que os alunos manifestam alguma dificuldade em justificar ou argumentar as suas respostas, da mesma forma que poderão não conseguir retirar e/ou estruturar alguma conclusão a partir das constatações gráficas que visualizam.	atualizados e os alunos podem centrar-se naquilo que é realmente importante. Durante o levantamento e posterior sistematização das conclusões reiradas, a professora deverá valorizar as conclusões de cada par, retirando delas a maior informação possível para chegarem, em turma, às conclusões pretendidas. Após discutidas e construídas em turma e escritas pela professora no quadro, as conclusões retiradas das questões 3 e 6 deverão ser transcritas para o caderno diário como conteúdo teórico. Na parte II, depois de concretizada através de uma figura como a que consta no enunciado da tarefa, será explorada rapidamente com outros exemplos de ângulos excêntricos de vértice no exterior da circunferência (cujos lados são tangentes à circunferência ou com um lado tangente à circunferência e outro secante).	Conclusão da Parte I: A amplitude de um ângulo com vértice no interior de uma circunferência é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e entre os prolongamentos dos seus lados. Que se traduz na fórmula (utilizando as letras da figura): $B\hat{A}C = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$ Conclusão da Parte II: A amplitude de umângulo com vértice no exterior de uma circunferência é igual à semidiferença entre as amplitudes dos lados compreendidos entre os seuslados. Que se traduz na fórmula (utilizando as letras da figua): $G\hat{F}H = \frac{\widehat{GH} - \widehat{JI}}{2}$

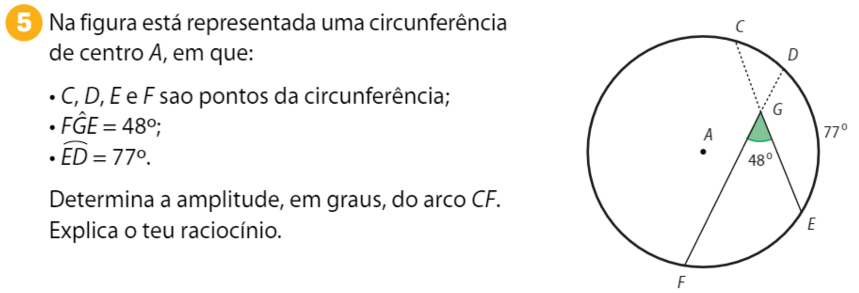
MOMENTO IV

- Os alunos terão o momento seguinte para consolidar os conhecimentos adquiridos, essencialmente através da aplicação das fórmulas construídas nas conclusões da tarefa realizada.

Trabalho autónomo: exercícios 2, 3 e 5 das páginas 94 e 95 do manual







Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Não são previstas dificuldades na resolução dos dois primeiros exercícios propostos. O exercício 5 da página 95 pode confrontar os alunos com algumas dificuldades de manipulação algébrica.	A professora deverá circular pela sala para se certificar de que os alunos estão a realizar trabalho autónomo, motivando à escrita das respostas completas no caderno diário e auxiliando os alunos que se deparem com a dificuldade esperada. Aquando da correção no quadro, a professora deverá certificar-se de que todos os alunos perceberam o cálculo algébrico incluído na resolução do exercício.	Os alunos deverão realizar o trabalho proposto recorrendo, se necessário, aos resultados retirados a partir da tarefa realizada anteriormente.

MOMENTO V

- A professora construirá um esquema-síntese com o esboço dos ângulos dados até ao momento e as respetivas relações entre as suas amplitudes e a dos arcos associados.

Anexo 25: Plano da aula do dia 21 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	21.mar.2017 Lição 110	**Ângulos e Circunferências**

Sumário
· Ângulo de segmento e ângulo ex-inscrito. · Resolução de exercícios do manual.
Conteúdos matemáticos
· Retas exterior, secante e tangente a uma circunferência e ponto de tangência

· Elementos da circunferência (corda, diâmetro, ângulo ao centro, ângulo inscrito, arco, extremos de um arco, ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito)
Objetivos
· Designar por «ângulo de segmento», um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência; · Saber que um ângulo de segmento tem amplitude igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados; · Designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar; · Saber que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.
Capacidades transversais
· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma) · Raciocínio matemático

Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação
· A professora, por observação, fará o registo das participações dos alunos ao longo da aula; · A professora recolherá, no final da aula, a resoluções escritas da tarefa à qual dará posterior feedback;

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	5 min	9h
II	· **Posição relativa de uma reta e circunferência** (slide 1)	3 min	9h05
III	· **Ângulo de segmento: teoria + exemplos** (slides 2 a 5) **Exercícios 1 e 2 da tarefa**	20 min	9h08
IV	· **Ângulo ex-inscrito: teoria + exemplos** (slides 7 a 9) · **Exercício 3 da tarefa** (slide 10)	15 min	9h28
V	· Conclusão da aula	2 min	9h43

Desenvolvimento da Aula

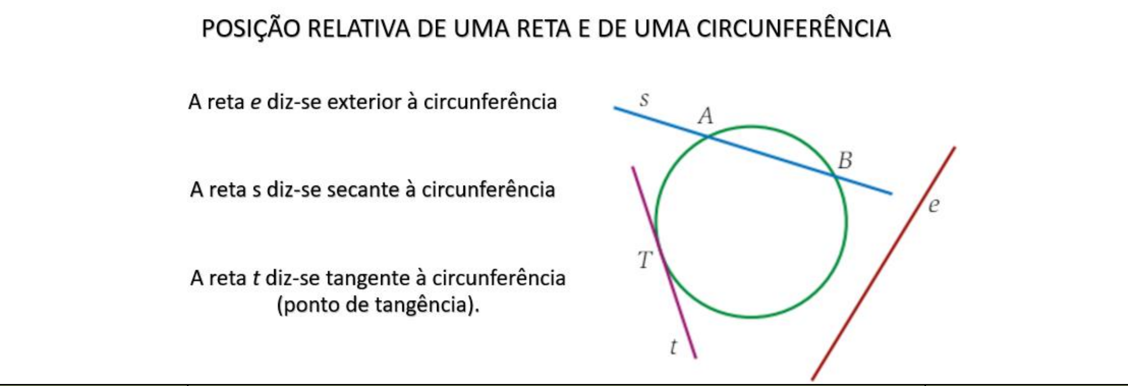
MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);

MOMENTO II

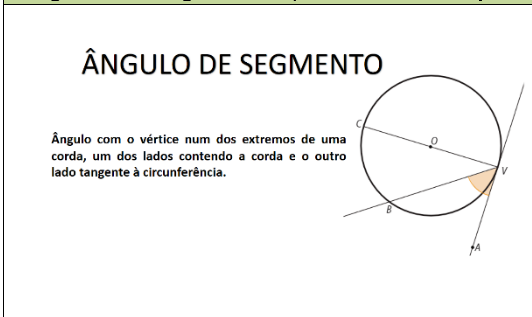
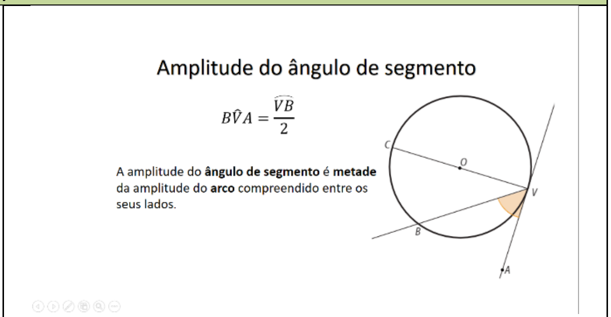
- Para o estudo dos ângulos de segmento é necessário que os alunos conheçam o conceito de "reta tangente" e de "ponto de tangência".

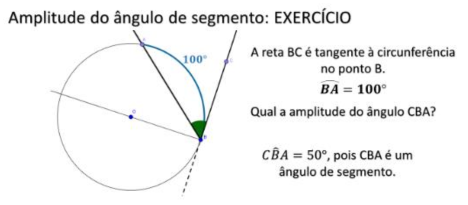
Posição relativa de uma reta e de uma circunferência



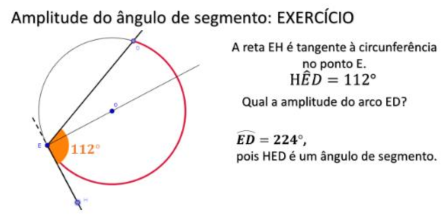
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Não são previstas dificuldades na aprendizagem dos conceitos apresentados.	Ao apresentar cada uma das posições (e respetivas retas) a professora deverá definir de forma breve e simples cada uma delas: → Reta exterior à circunferência: não interseta a circunferência; → Reta secante à circunferência: interseta a circunferência em dois pontos; → Reta tangente à circunferência: interseta a circunferência num ponto (ponto de tangência) e faz com o raio/diâmetro um ângulo reto (desenhando na figura o raio e diâmetro da circunferência que formam com a reta tangente um ângulo reto). Pedirá aos alunos que passem o título, que façam um esboço do desenho e transcrevam a informação apresentada, sugerindo que o façam na forma de legenda.	Os alunos deverão transcrever para o caderno diário o que lhes for indicado, podendo ou não seguir a sugestão da professora.

MOMENTO III

Ângulo de segmento (teoria e exemplos)	
 Slide 2	 Slide 3



Slide 4



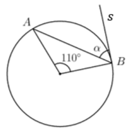
Slide 5

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Na aula anterior os alunos revelaram alguma confusão na identificação e distinção entre um ângulo inscrito e os outros tipos de ângulos excêntricos e mostraram alguma dificuldade em organizar os conceitos (tipos de ângulos) apresentados até então.	Indo ao encontro da dificuldade prevista a professora, pede aos alunos que nomeiem os tipos de ângulos que conhecem. Slide 2: A professora pode simplificar a definição apresentada verbalmente referindo que "um ângulo de segmento tem o vértice sob a circunferência, um lado contém uma corda e o outro é tangente à circunferência". Pede aos alunos que escrevam o título apresentado, passem a definição e que façam um esboço da figura e estabelece uma relação com o slide seguinte. Enquanto distribuirá os enunciados da tarefa a realizar. Do slide 3 a professora pedirá aos alunos para passarem exclusivamente a fórmula referindo que as letras que constam na mesma são as da figura deste slide e do anterior, do qual fizeram já um esboço anteriormente. No início de cada um dos exercícios, a professora deverá ajudar os alunos a identificarem o tipo de ângulo apresentado (mesmo que de imediato a turma atribua a designação correta): "É um ângulo ao centro? Por que não? É um ângulo inscrito, por que não? É um ângulo excêntrico de vértice no interior ou exterior da circunferência? Por que não?" Após a correta identificação do ângulo, a professora deve levar os alunos a calcularem mentalmente a amplitude do ângulo ou do arco (slide 4 e 5, respetivamente). A professora pede aos alunos que não passem os exemplos, pois de seguida ser-lhe-ás dado tempo para resolverem os exercícios onde deverão apresentar as suas respostas.	À primeira questão dirigida à turma, é esperado que os alunos enumerem: ângulos ao centro, ângulos inscritos, ângulos excêntricos com vértice no interior da circunferência e ângulos excêntricos com vértice no exterior da circunferência. Sob orientação da professora, espera-se que os alunos consigam designar corretamente os ângulos e consequentemente (através da fórmula apresentada no slide 3) calcular mentalmente as amplitudes solicitadas.

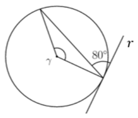
Ângulo de segmento (exercícios 1 e 2 da tarefa)

1. Sabendo que as retas s e r são tangentes a cada uma das circunferências, calcule a amplitude dos ângulos α e γ apresentando as justificações que lhe pareçam necessárias.

a)



b)



Exercício 1

2. Sabendo que:
   i. A reta EF é tangente à circunferência no ponto F;
   ii. $G\hat{O}H = 82°$.

   Determine:

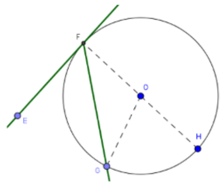
   a) $\widehat{FG}$

   b) $E\hat{F}G$

   c) $G\hat{F}H$

   d) $E\hat{F}H$

   e) $\widehat{FHG}$

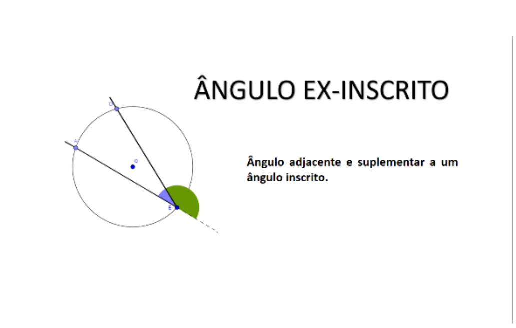


Exercício 2

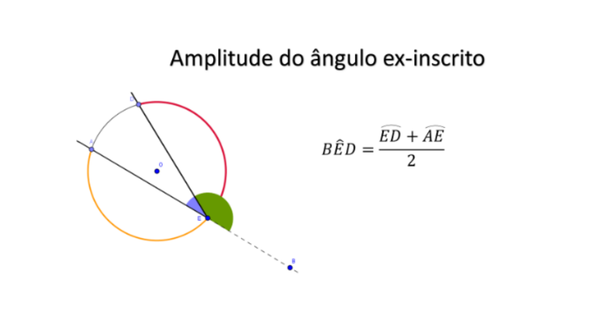
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Qualquer uma das alíneas do exercício 1 não são resolvidas apenas pela aplicação direta da fórmula apresentada nesta aula, sendo necessário o reconhecimento de um ângulo ao centro o que eleva o grau de dificuldade relativamente aos exemplos anteriormente discutidos. No exercício 2, os alunos podem demonstrar dificuldades em estabelecer todas as relações subjacentes à figura.	A professora deverá relembrar que os alunos podem identificar as letras que lhes forem necessárias para uma construção simples e completa das justificações que incluirão nas suas respostas. Ao circular pela sala, a professora deverá averiguar se os alunos se deparam com a dificuldade prevista e atendendo ao número de alunos que a enfrentam, poderá optar por fazer uma observação esclarecedora para toda a turma sem responder diretamente ao exercício. A respeito do exercício 1: “Reparem que na figura estão assinalados outros tipos de ângulos. Que tipo de ângulos são? É preciso calcular a amplitude de que ângulos ou arcos? Como calculam?”. A respeito do exercício 2: “As alíneas estão organizadas sequencialmente, ou seja, é importante que não «saltem» nenhuma delas pois poderão ter dificuldade em responder a alguma anterior. Vejam, relativamente a cada uma delas, que tipo de ângulos estão apresentados e que relações podem estabelecer.”	À primeira dirigida à turma, é esperado que os alunos enumerem: ângulos ao centro, ângulos inscritos, ângulos excêntricos com vértice no interior da circunferência e ângulos excêntricos com vértice no exterior da circunferência. Sob orientação da professora, espera-se que os alunos consigam designar corretamente os ângulos e consequentemente (através da fórmula apresentada no slide 3) calcular mentalmente as amplitudes solicitadas.

MOMENTO IV

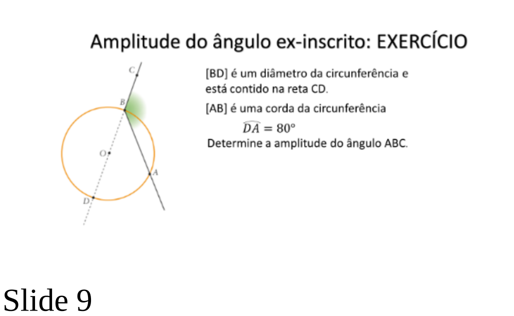
Ângulo ex-inscrito (teoria e exemplos)



Slide 7



Slide 8

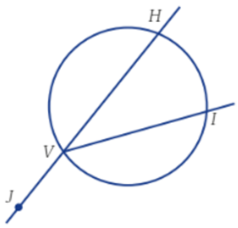


Slide 9

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
A dificuldade demonstrada no início do momento III (em organizar os tipos de ângulos e respetivas designações estudados até ao momento) pode permanecer.	A professora faz surgir o conceito de “ângulo ex-inscrito” através do de “ângulo inscrito” fazendo a relação entre os vários passos da apresentação do slide 7. Pede aos alunos que passem o que está nesse mesmo slide e refere que no slide seguinte (slide 8) será apresentado o modo de calcular a amplitude deste tipo de ângulos. Ao apresentar-se o slide 9, pede-se ajuda aos alunos para a resolução e construção da resposta ao exercício proposto, sendo a professora a escrevê-la no quadro. Caso os alunos sigam o raciocínio associado à segunda hipótese de resolução, a professora deverá fazer referência à primeira. Não será solicitado aos alunos que passem o exercício proposto nem a respetiva resolução.	Sob orientação da professora, espera-se que os alunos consigam responder à questão apresentada no slide 9. Existem duas possibilidades de resposta. **Hipótese 1** $A\hat{B}C = \frac{\widehat{BD}+\widehat{AB}}{2}$, porque ABC é um ângulo ex-inscrito. $\widehat{BD} + \widehat{BA} = 360 - 80 = 280°$ $A\hat{B}C = \frac{280}{2} = 140°$ **Hipótese 2** $D\hat{B}A = 40°$, porque DBA é um ângulo inscrito. $A\hat{B}C = 180 - 40 = 140°$, porque ABC e DBA são ângulos suplementares.

Ângulo ex-inscrito (exercício 3 da tarefa)

3. Na figura, o ponto V pertence à reta HJ.
   a) Na figura, está representado um ângulo inscrito e um ângulo ex-inscrito. Indica-os.



   b) Admitindo que:
      i. $H\hat{V}I = 31°$, calcule $J\hat{V}I$.
      ii. $\widehat{HI} = 72°$, calcule $J\hat{V}I$.
      iii. $\widehat{VH} = 100°$ e $\widehat{VI} = 94°$, calcule $J\hat{V}I$.

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno (resoluções esperadas)
A alínea a da questão 3 servirá de apoio à resolução da alínea seguinte, ajudando os alunos a esclarecerem alguns elementos presentes na figura (um ângulo inscrito e um ângulo ex-inscrito) e deste modo, não são esperadas dificuldades por parte dos alunos na resolução deste exercício.	Assim que os alunos iniciam a resolução do exercício, a professora refere que as alíneas i, ii e iii são independentes, ou seja, o resultado obtido numa já não é aplicado na seguinte pois a condição inicial é diferente.	**<u>Alínea a)</u>** HVI é um ângulo inscrito. JVI é um ângulo ex-inscrito. **<u>Alínea b) i</u>** **Hipótese 1:** $\widehat{HI} = 62°$, pois HVI é um ângulo inscrito. $\widehat{HV} + \widehat{VI} = 360 - 62 = 298°$ $J\hat{V}I = \frac{298}{2} = 149°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito. **Hipótese 2:** $J\hat{V}I = 180 - 31 = 149°$, pois JVI e HVI são ângulos suplementares. **<u>Alínea b) ii</u>** **Hipótese 1** $H\hat{V}I = 36°$, pois HVI é um ângulo inscrito. $J\hat{V}I = 180 - 36 = 144°$, pos JVI e HVI são ângulos suplementares. **Hipótese 2** $\widehat{VH} + \widehat{VI} = 360 - 72 = 288°$ $J\hat{V}I = \frac{288}{2} = 144°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito. **<u>Alínea b) iii</u>** $J\hat{V}I = \frac{100+94}{2} = \frac{194}{2} = 97°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, o último momento da aula é reservado a uma revisão sobre todos os ângulos estudados nesta subunidade através dum quadro que será entregue a cada aluno.

Anexo 26: Plano da aula do dia 23 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	23.mar.2017 Lições 111 e 112	**Ângulos e Circunferências** Ângulos ex-inscritos

Sumário	
· Ângulo ex-inscrito: continuação da aula anterior. · Continuação da resolução da tarefa "Ângulos de segmento e ângulos ex-inscritos". · Resolução de exercícios do manual.	
Conteúdos matemáticos	
· Elementos da circunferência (corda, diâmetro, ângulo ao centro, ângulo inscrito, arco, extremos de um arco, ângulo de segmento, ângulo ex-inscrito)	
Objetivos	
· Designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar; · Saber que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.	
Capacidades transversais	
· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma) · Raciocínio matemático	
Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Planificação da aula; · Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;
Avaliação	
· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula; · A professora avaliará e dará feedback às resoluções escritas dos alunos (a entregar numa folha em separado);	

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	5 min	10h05
II	· **Última aula** (slide 1) · **Revisão geral dos ângulos estudados** (slide 2) **Conclusão do exercício 2 da tarefa** (slide 3)	15 min	10h10
III	· **Ângulo ex-inscrito: teoria + exemplo** (slides 4 a 6) **Exercício 3 da tarefa** (slide 7)	20 min	10h25
IV	· **Revisão geral dos ângulos estudados** (slide 8) · **Exercícios de consolidação** (slides 9 a 13) P. 91: 5 P. 91: 4	45 min	10h45

	P. 105: 11 P. 105: 12		
V	· Conclusão da aula · *Feedback* facultativo: CA_p. 57: 13 (slide 14)	5 min	11h30

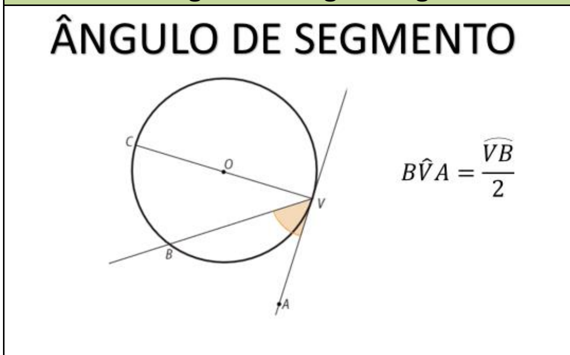
Desenvolvimento da Aula

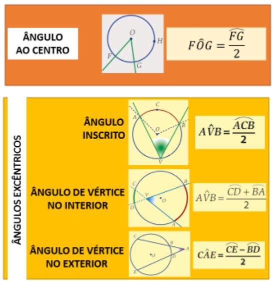
MOMENTO I

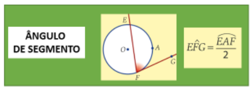
- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);

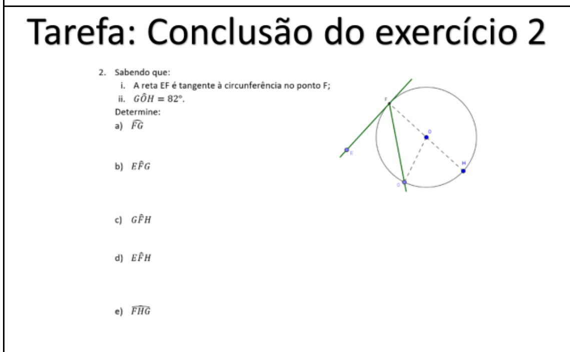
MOMENTO II

Breve abordagem ao ângulo segmento







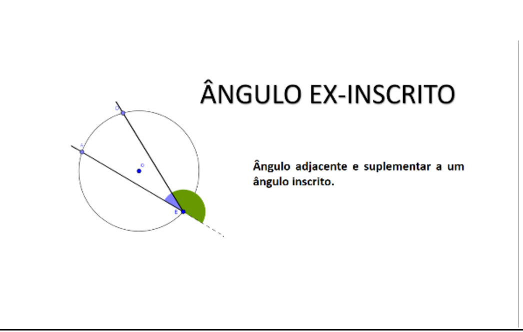


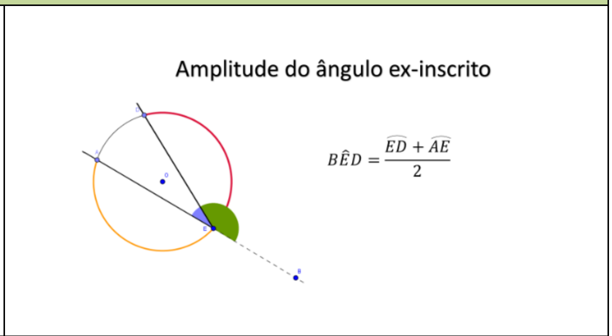
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Na aula anterior, aquando da resolução autónoma dos exercícios 1 e 2 da tarefa, os alunos mostraram a tendência de calcular a amplitude de qualquer ângulo como sendo metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados. Visto que anteriormente à conclusão da	A professora impulsiona a participação ativa da turma na construção da síntese que é completada progressivamente, fazendo-se surgir os elementos em falta. Posteriormente, ao circular pela sala, a professora deve averiguar se os alunos se deparam com a dificuldade prevista e atendendo ao número de alunos que a enfrentam, pode optar por fazer uma observação esclarecedora para toda a turma sem responder diretamente ao exercício. A respeito do exercício: “Reparem que na figura estão assinalados vários ângulos. Que tipo de ângulos são? É preciso calcular a	Os alunos terão um papel ativo na construção da síntese apresentada no slide 2. De seguida, na resolução do exercício 2, os alunos desenvolvem trabalho autónomo (individualmente ou em díade), solicitando o auxílio da professora quando não

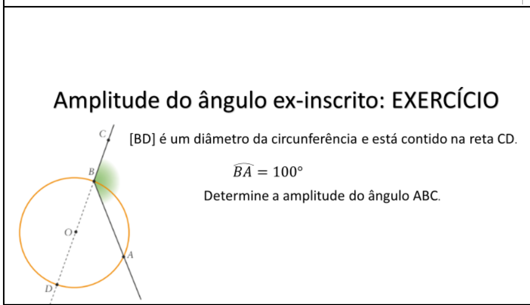
resolução do exercício 2 é apresentada uma síntese dos ângulos estudados até então, espera-se que essa dificuldade seja, em grande parte, ultrapassada.	amplitude de que ângulos ou arcos? Como calculam?”. Relembra ainda que “As alíneas estão organizadas sequencialmente, ou seja, é importante que não «saltem» nenhuma delas pois poderão ter dificuldade em responder a alguma posterior.”	conseguirem progredir na resolução devido a uma dificuldade concreta do momento.

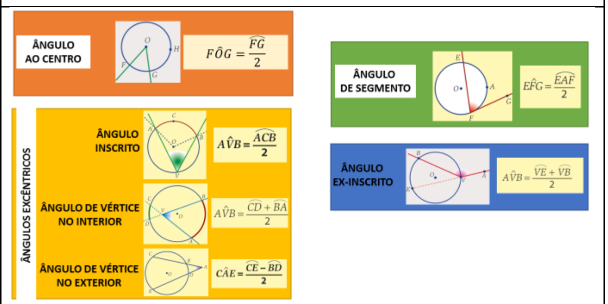
MOMENTO III

Ângulo ex-inscrito (teoria e exemplos)







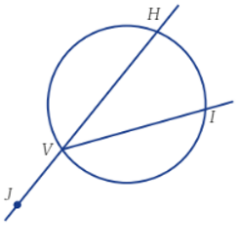


Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Na aula anterior, os alunos sentiram a necessidade de perceber o “porquê” de se calcular a amplitude do ângulo de segmento segundo a fórmula que foi apresentada. Não são esperadas outras dificuldades.	A professora faz surgir o conceito de “ângulo ex-inscrito” através do de “ângulo inscrito” fazendo a relação entre os vários passos da apresentação do slide. Pede aos alunos que passem o que está nesse mesmo slide e refere que no slide seguinte será apresentado o modo de calcular a amplitude deste tipo de ângulos. Ao apresentar-se o slide seguinte, pede-se ajuda aos alunos para a resolução e construção da resposta ao exercício proposto, sendo a professora a escrevê-la no quadro. Caso os alunos sigam o raciocínio associado à segunda	Sob orientação da professora, espera-se que os alunos consigam responder à questão apresentada no slide 9. Existem duas possibilidades de resposta. **Hipótese 1** $A\hat{B}C = \frac{\widehat{BD}+\widehat{AB}}{2}$, porque ABC é um ângulo ex-inscrito. $\widehat{BD} + \widehat{BA} = 360 - 80$ $= 280°$ $A\hat{B}C = \frac{280}{2} = 140°$ **Hipótese 2** $D\hat{B}A = 40°$, porque DBA é um ângulo inscrito.

	hipótese de resolução, a professora deverá fazer referência à primeira. Não será solicitado aos alunos que passem o exercício proposto nem a respetiva resolução.	$A\hat{B}C = 180 - 40 = 140°$, porque ABC e DBA são ângulos suplementares.

Ângulo ex-inscrito (exercício 3 da tarefa)

3. Na figura, o ponto V pertence à reta HJ.
   a) Na figura, está representado um ângulo inscrito e um ângulo ex-inscrito. Indica-os.

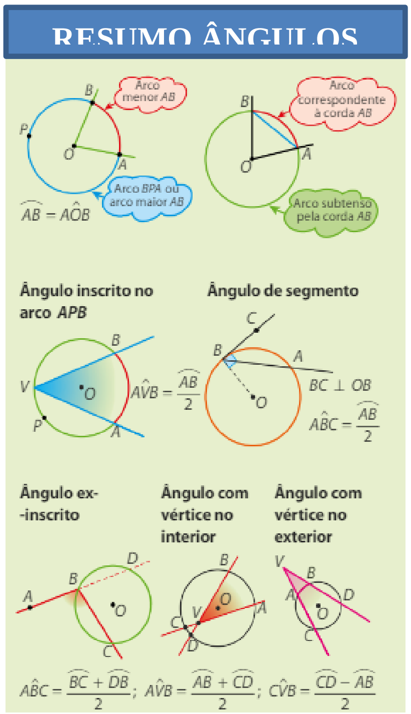


   b) Admitindo que:
      i. $H\hat{V}I = 31°$, calcule $J\hat{V}I$.
      ii. $\widehat{HI} = 72°$, calcule $J\hat{V}I$.
      iii. $\widehat{VH} = 100°$ e $\widehat{VI} = 94°$, calcule $J\hat{V}I$.

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno (resoluções esperadas)
A alínea a da questão 3 servirá de apoio à resolução da alínea seguinte, ajudando os alunos a esclarecerem alguns elementos presentes na figura (um ângulo inscrito e um ângulo ex-inscrito) e deste modo, não são esperadas dificuldades por parte dos alunos na resolução deste exercício.	Assim que os alunos iniciam a resolução do exercício, a professora refere que as alíneas i, ii e iii são independentes, ou seja, o resultado obtido numa já não é aplicado na seguinte pois a condição inicial é diferente.	**<u>Alínea a)</u>** HVI é um ângulo inscrito. JVI é um ângulo ex-inscrito. **<u>Alínea b) i</u>** **Hipótese 1:** $\widehat{HI} = 62°$, pois HVI é um ângulo inscrito. $\widehat{HV} + \widehat{VI} = 360 - 62 = 298°$ $J\hat{V}I = \frac{298}{2} = 149°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito. **Hipótese 2:** $J\hat{V}I = 180 - 31 = 149°$, pois JVI e HVI são ângulos suplementares. **<u>Alínea b) ii</u>** **Hipótese 1** $H\hat{V}I = 36°$, pois HVI é um ângulo inscrito. $J\hat{V}I = 180 - 36 = 144°$, pos JVI e HVI são ângulos suplementares. **Hipótese 2** $\widehat{VH} + \widehat{VI} = 360 - 72 = 288°$ $J\hat{V}I = \frac{288}{2} = 144°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito. **<u>Alínea b) iii</u>** $J\hat{V}I = \frac{100+94}{2} = \frac{194}{2} = 97°$, pois JVI é um ângulo ex-inscrito.

MOMENTO IV

- A professora escreve no quadro a lista de exercícios a resolver em sala de aula. Após isso, distribui pela turma o esquema que sintetiza os conteúdos estudados nesta subunidade.

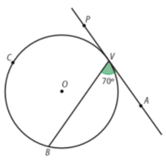


Exercícios de consolidação

p. 91: 5

5. Na figura está representada uma circunferência de centro *O*.
Sabe-se que:
- a reta *AP* é tangente à circunferência em *V*;
- [*VB*] é uma corda;
- *C* pertence à circunferência;
- $B\hat{V}A = 70^\circ$.

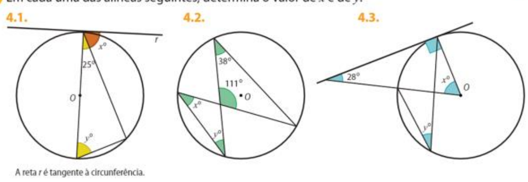
Determina a amplitude do arco capaz *VCB*. Justifica.



Slide 7

p. 91: 4

4. Em cada uma das alíneas seguintes, determina o valor de x e de y.



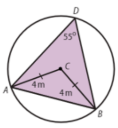
Slide 8

p. 105: 11

11. Na figura está representada uma circunferência de centro *C*.

11.1. Determina a amplitude do ângulo *BAC*. Justifica a tua resposta.

11.2. Determina, em metros, o comprimento do arco *AB*.

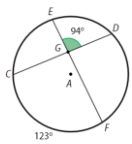


Slide 9

p. 105: 12

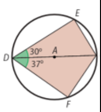
12. Considera a figura onde está representada uma circunferência de centro *A*.
Sabe-se que:
- *F*, *D*, *C* e *E* pertencem à circunferência;
- $D\hat{G}E = 94^\circ$;
- $\overset{\frown}{CF} = 123^\circ$.

Determina a amplitude, em graus, do arco *DE*.



p. 106: 17

17. Na figura está representada uma circunferência de centro *A*. De acordo com os dados da figura, determina a amplitude do arco *EDF*. Explica o teu raciocínio.



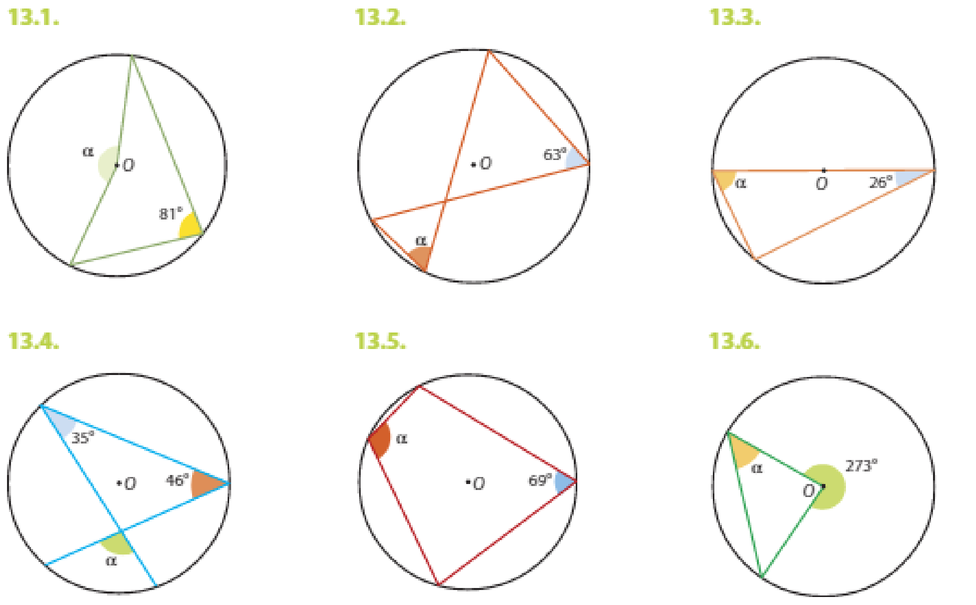
Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Os alunos podem manifestar dificuldades tanto na interpretação e recolha de informação a partir dos enunciados/figuras apresentados como no reconhecimento dos conhecimentos a direcionar/utilizar na resolução de determinado exercício.	O papel da professora neste momento da aula será maioritariamente motivador e de acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos. Ao circular pela sala, a professora deve averiguar se os alunos se deparam com a dificuldade prevista e atendendo ao número de alunos que a enfrentam, pode optar por fazer alguma observação esclarecedora para toda a turma sem responder, na totalidade, à questão apresentada.	Os alunos desenvolvem trabalho autónomo (individualmente ou em díade), solicitando o auxílio da professora quando não conseguirem progredir na resolução (mesmo fazendo recurso à síntese entregue pela professora). Os alunos voluntariam-se para escrever a resolução dos exercícios no quadro, explicitando a sua resposta a toda a turma.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, o último momento da aula é reservado a uma breve apresentação do exercício que é sugerido como facultativo com vista a obterem *feedback* da respetiva resolução por parte da professora.

Exercício facultativo para *feedback* (CA_p.57: 13)

13 Em cada uma das figuras está representada uma circunferência de centro O. Determina, em cada uma delas, a amplitude do ângulo α. Explica o teu raciocínio, apresentando todos os cálculos que efetuares.



Anexo 27: Plano da aula do dia 27 de março.

<table>
<tr><th colspan="3">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola [redacted]</td><td>9.ºF</td><td>Domínio: GM9</td></tr>
<tr><td>27.mar.2017
Lições 113 e 114</td><td>Ângulos e Circunferências
Soma dos ângulos internos e externos de um polígono</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Sumário</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Ângulos internos e externos de um polígono.
· Resolução da tarefa “Ângulos internos de um polígono”.
· Resolução de exercícios de consolidação.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conteúdos matemáticos</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Ângulo interno; ângulo externo; polígono regular.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Objetivos</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Provar que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)\times 180°$ e saber que a soma de n ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro;
· Reconhecer que, num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ e a de um ângulo externo é dada por $\frac{360°}{n}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Capacidades transversais</th></tr>
<tr><td colspan="2">· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
· Raciocínio matemático</td></tr>
<tr><th colspan="2">Recursos e Materiais</th></tr>
<tr><th>Do professor</th><th>Do aluno</th></tr>
<tr><td>· Manual e Caderno de Atividades;
· Quadro e canetas para quadro;</td><td>· Manual e Caderno de Atividades;
· Lápis, caneta e borracha;</td></tr>
<tr><th colspan="2">Avaliação</th></tr>
<tr><td colspan="2">· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula;
· A professora avaliará e dará feedback às resoluções escritas dos alunos;</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Momentos da aula</th><th>duração</th><th>início</th></tr>
<tr><td>I</td><td>· Sumário
· Faltas/presenças</td><td>5 min</td><td>10h05</td></tr>
<tr><td>II</td><td>· Conceito de ângulo interno (slide 1)
· Tarefa “Ângulos internos de um polígono” (slide 2)
· Conclusão da tarefa (slide 3)
· Polígonos regulares (slide 4)</td><td>40 min</td><td>10h10</td></tr>
<tr><td>III</td><td>· Conceito de ângulo externo (slide 5)
· Soma dos ângulos externos (slide 6)
· Polígonos regulares (slide 7)</td><td>15 min</td><td>10h50</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>· Exercícios de consolidação (slides 8 a 10)
P. 98: 3, 4, 5, 6 e 7 (slide 8)
P. 99: 8, 9 (slide 9)
P. 99: 10 (slide 10)</td><td>25 min</td><td>11h05</td></tr>
</table>

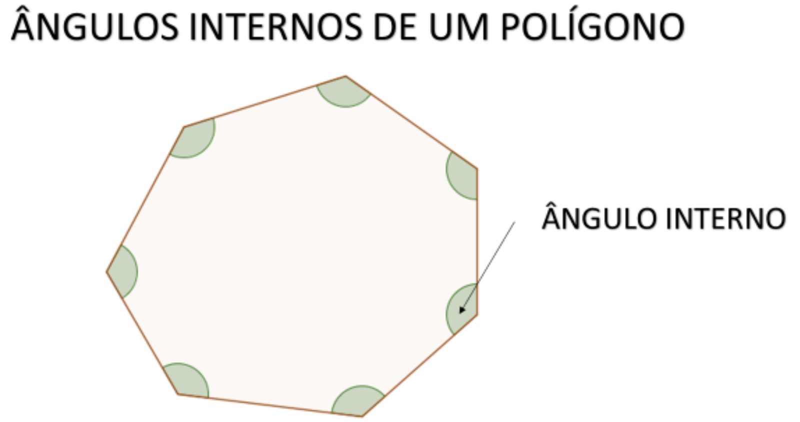
V	· **Conclusão da aula** Entrega dos *feedbacks* escritos	5 min	11h30

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);

MOMENTO II

Conceito de ângulo interno e amplitude dos ângulos internos de um polígono		
		
Dificuldades	**Papel professor**	**Papel aluno**
Através do sumário, espera-se que os alunos consigam fazer a legenda da figura sem dificuldade.	A professora impulsiona a participação ativa da turma na legenda da figura apresentada. A professora, antecipando um dos aspetos a abordar na tarefa, pergunta aos alunos quanto é a soma dos ângulos internos de um triângulo e quanto esperam que seja a soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono apresentado. A professora pede aos alunos que façam no caderno um esboço da figura apresentada, advertindo que basta assinalarem um ângulo interno e a respetiva legenda.	Espera-se que os alunos colaborem com a legenda, reconhecendo que os ângulos apresentados são os ângulos internos do polígono.

Tarefa "Ângulos internos de um polígono"

1. A partir de um dos vértices do polígono que lhe foi entregue, trace as diagonais do mesmo, unindo, através de retas, esse vértice a cada um dos outros vértices que não lhe são adjacentes
2. Relativamente ao polígono que lhe foi entregue, quantos lados tem e em quantos triângulos o decompôs? Responda diretamente na tabela.
3. [discussão em turma]
4. A soma dos ângulos internos de um triângulo é ______.
   Calcule a soma dos ângulos internos do polígono que lhe foi entregue (na tabela).
5. [discussão em turma]

Polígono	Nº de lados	Nº de triângulos	Soma dos ângulos internos do polígono (S_i)
losango			
pentágono			
hexágono			
heptágono			
octógono			
	n		

A SOMA DAS AMPLITUDES DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO COM n LADOS É DADA PELA EXPRESSÃO:

$$S_i = (n-2) \times 180°$$

<table>
<tr><th>Dificuldades</th><th>Papel professor</th><th>Papel aluno</th></tr>
<tr>
<td>Os alunos podem revelar dificuldades na interpretação do enunciado da primeira questão e consequentemente prosseguir para uma resolução errada da mesma, traçando todas as diagonais do polígono a partir de todos os vértices do mesmo.</td>
<td>Inicialmente, é lido o enunciado das primeiras e segundas questões.
Após a leitura do enunciado a professora pergunta se existem dúvidas relativamente ao mesmo. Caso existam, pode optar-se por exemplificar o que é pretendido fazendo uso de um eneágono.
Posteriormente, ao circular pela sala, a professora deve averiguar se os alunos se deparam com a dificuldade prevista e atendendo ao número de alunos que a enfrentam, pode optar por fazer uma observação esclarecedora para toda a turma.
Após a resolução individual da segunda questão, faz-se o completamento das segunda e terceira colunas da tabela com base nas respostas dos alunos à segunda questão.
Lê-se posteriormente o enunciado da quarta questão e caso os alunos revelem dúvidas acerca do mesmo, a professora pode sugerir que escrevam "180°" no interior de cada triângulo. Sublinha a importância de apresentarem os cálculos.
Após a resolução individual da quarta questão e com base nas respostas dos alunos à mesma, faz-se o completamento da quarta coluna da tabela. Procurando que os alunos cheguem à relação entre o número de lados de um polígono e o número d triângulos em que é decomposto, a professora pergunta então: “E se tivesse 9 lados? E 10? E se fossem n lados?”. Posteriormente, para se estabelecer a relação entre o número de lados de um polígono e a soma das amplitudes dos ângulos internos, a</td>
<td>Sob orientação da professora, espera-se que os alunos consigam resolver a tarefa autonomamente.
Obtendo os valores apresentados:
<table>
<tr><th>Polígono</th><th>Nº de lados</th><th>Nº de triângulos</th><th>Soma dos ângulos internos do polígono (S_i)</th></tr>
<tr><td>losango</td><td>4</td><td>2</td><td>360°</td></tr>
<tr><td>pentágono</td><td>5</td><td>3</td><td>540°</td></tr>
<tr><td>hexágono</td><td>6</td><td>4</td><td>720°</td></tr>
<tr><td>heptágono</td><td>7</td><td>5</td><td>900°</td></tr>
<tr><td>octógono</td><td>8</td><td>6</td><td>1080°</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

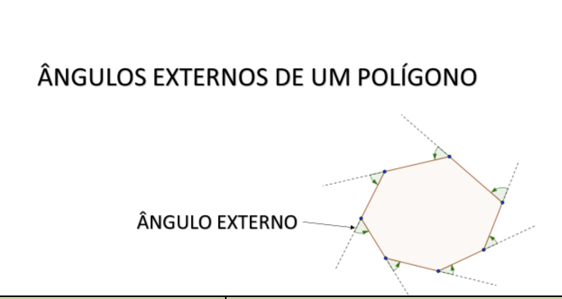
	professora questiona a turma: “E se tivesse 9 lados, como calcularíamos a soma dos ângulos internos? E 10? E se fossem *n* lados?” para que se possa chegar à relação entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono e o número de triângulos em que se decompõe o mesmo. Apresentando o slide seguinte, a professora exibe a conclusão a que chegaram com a tarefa, pedindo aos alunos que transcrevam para o caderno diário a fórmula apresentada.	

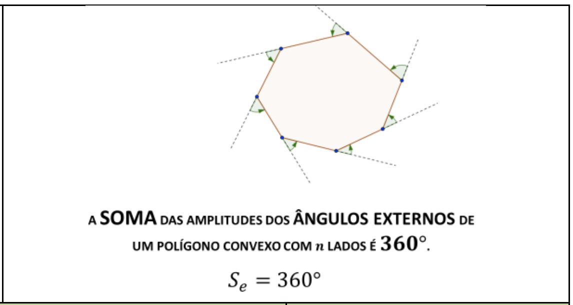
Amplitude de um ângulo interno (num polígono regular)

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Os alunos podem não reconhecer a relação entre as fórmulas apresentadas anteriormente e o que se pretende determinar com esta questão.	A professora começa por sublinhar que todos os polígonos apresentados no slide 4 são regulares, perguntando à turma o significado dessa característica. Caso os alunos manifestem a dificuldade prevista, a professora começa por escrever no interior de do quadrado e do pentágono o valor da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, pedindo a colaboração da turma para tal. Pede-se ajuda aos alunos para a resolução e construção da resposta ao exercício proposto, sendo a professora a escrevê-la no quadro. A professora faz surgir a fórmula apresentada neste slide e posteriormente pede aos alunos que transcrevam para o caderno diário e a apliquem ao caso do hexágono.	Os alunos terão um papel ativo durante a apresentação dos slides, devendo responder às interpelações dirigidas pela professora à turma e auxiliar na construção da resposta.

MOMENTO III

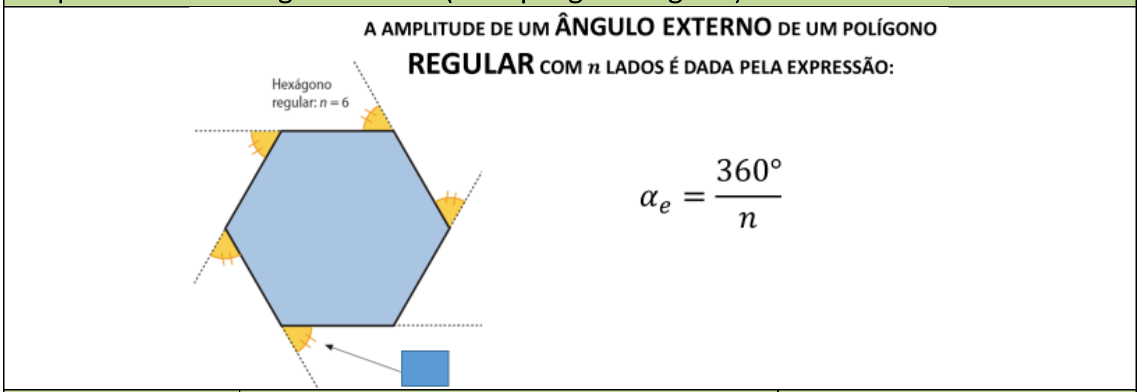
Conceito de ângulo externo e amplitude dos ângulos externos de um polígono





Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Através do sumário, espera-se que os alunos consigam fazer a legenda da figura sem dificuldade. Podem manifestar dificuldade em aceitar que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono (independentemente do número de lados) é 360°.	A professora, através da figura explica o modo como se identifica/constrói um ângulo externo (formado por um dos lados do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo), recordando que o ângulo interno e um externo adjacente a ele, são ângulos suplementares. A professora pede aos alunos que façam no caderno um esboço da figura apresentada, advertindo que basta assinalarem um ângulo externo e a respetiva legenda. Para explicitar o resultado apresentado no slide seguinte pode colocar-se uma caneta sobre um dos lados do polígino e rodá-la de acordo com a amplitude de cada ângulo externo de forma que os alunos vejam que a caneta volta a posição inicial, ou seja, realiza uma volta completa (um ângulo de 360°), após isso faz surgir o resultado "a soma dos ângulos externos de um polígono com n lados é 360°. Sublinha que esta propriedade se verifica em qualquer polígono côncavo, com um qualquer número de lados, seja ele regular ou irregular.	Os alunos terão um papel ativo durante a apresentação dos dois slides, devendo responder às interpelações dirigidas pela professora à turma.

Amplitude de um ângulo interno (num polígono regular)



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Os alunos podem não reconhecer a relação entre as	A professora começa por sublinhar que o polígono apresentado é regular, perguntando à turma o significado dessa característica, isto é, os ângulos	Os alunos terão um papel ativo durante a apresentação dos slides, devendo responder às

fórmulas apresentadas anteriormente e o que se pretende determinar com esta questão.	internos são todos geometricamente iguais e consequentemente os ângulos externos também. A professora faz surgir a fórmula apresentada neste slide e posteriormente pede aos alunos que a transcrevam para o caderno diário.	interpelações dirigidas pela professora à turma, tanto na "descoberta" do "valor escondido" ($\frac{360}{6} = 60°$) como na formulação da regra geral.

MOMENTO IV

- A professora escreve no quadro a lista de exercícios a resolver em sala de aula.

Exercícios de consolidação

p. 98

3 Calcula a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com:
3.1. 6 lados; 3.2. 10 lados; 3.3. 50 lados.

4 Determina a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono com:
4.1. 6 lados; 4.2. 10 lados; 4.3. 50 lados.

5 Calcula a amplitude de cada um dos ângulos internos de um polígono regular com:
5.1. 6 lados; 5.2. 8 lados; 5.3. 14 lados.

6 Calcula a amplitude de cada um dos ângulos externos de um polígono regular com:
6.1. 6 lados; 6.2. 8 lados; 6.3. 14 lados.

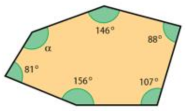
p. 99

8 Determina o número de lados do polígono regular cujos ângulos internos têm:
8.1. 90º de amplitude; 8.2. 120º de amplitude; 8.3. 170º de amplitude.

9 Determina o número de lados do polígono regular cujos ângulos externos têm:
9.1. 90º de amplitude; 9.2. 120º de amplitude; 9.3. 170º de amplitude.

10 Na figura está representado um polígono irregular com seis lados.
Determina a amplitude do ângulo α.

p. 99



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Os alunos podem manifestar dificuldades em saber que fórmula utilizar perante cada um dos enunciados. As questões 8 e 9 implicam o raciocínio inverso que não foi exemplificado pela professora é natural que se levantem dúvidas para alguns alunos. A resolução de equações (nos exercícios 8 e 9) é um processo no qual os alunos manifestaram bastantes dificuldades (no estudo da subunidade em questão).	O papel da professora neste momento da aula será maioritariamente motivador e de acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos. Ao circular pela sala, a professora deve averiguar se os alunos se deparam com a dificuldade prevista e atendendo ao número de alunos que a enfrentam, pode optar proceder à resolução imediata dos exercícios no quadro. Nos exercícios 8 e 9 a professora sugere aos alunos que reconheçam, primeiramente, o que sabem e o que querem saber, e posteriormente, qual a fórmula associada aos dados que temos e que procuramos.	Os alunos desenvolvem trabalho autónomo (individualmente ou em díade), solicitando o auxílio da professora quando não conseguirem progredir na resolução. Os alunos voluntariam-se para escrever a resolução dos exercícios no quadro, explicitando a sua resposta a toda a turma.

MOMENTO V

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, no último momento da aula a professora entrega os *feedbacks* escritos do último exercício.

Anexo 28: Plano da aula do dia 28 de março.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	28.mar.2017 Lições 115	**Ângulos e Circunferências** Ângulos internos e externos de um polígono Polígonos inscritos numa circunferência

Sumário
· Correção do trabalho de casa acerca de ângulos internos e externos de um polígono. · Polígonos inscritos numa circunferência. · Resolução de exercícios de consolidação.

Conteúdos matemáticos
· Ângulo interno; ângulo externo; polígono regular.

Objetivos
· Saber que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com *n* lados é igual a $(n-2)\times 180°$ e que a soma de *n* ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro; · Saber que, num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$ e a de um ângulo externo é dada por $\frac{360°}{n}$. · Reconhecer que a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso.

Capacidades transversais
· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma) · Raciocínio matemático

Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro;	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha;

Avaliação
· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula;

Momentos da aula		duração	início
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	5 min	10h05
II	· Correção do trabalho de casa (slides 1 e 2)	10 min	10h10
III	· Polígonos inscritos numa circunferência (slides 3) · Quadriláteros inscritos (slide 4) · Exercícios de consolidação (slide 5)	25 min	10h20
IV	· **Conclusão da aula** · Entrega dos *feedbacks* escritos	5 min	10h50

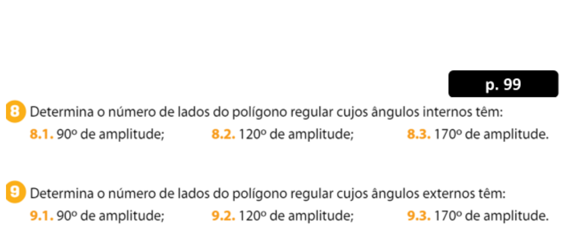
Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade);
- Regista-se quem fez ou não o trabalho de casa.

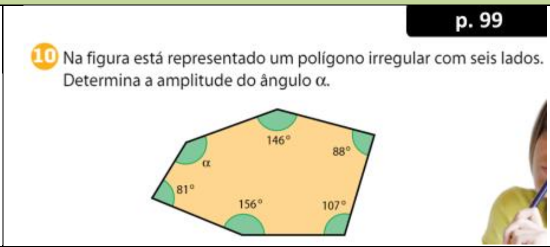
MOMENTO II

Correção do trabalho de casa


p. 99

8 Determina o número de lados do polígono regular cujos ângulos internos têm:
8.1. 90º de amplitude; 8.2. 120º de amplitude; 8.3. 170º de amplitude.

9 Determina o número de lados do polígono regular cujos ângulos externos têm:
9.1. 90º de amplitude; 9.2. 120º de amplitude; 9.3. 170º de amplitude.

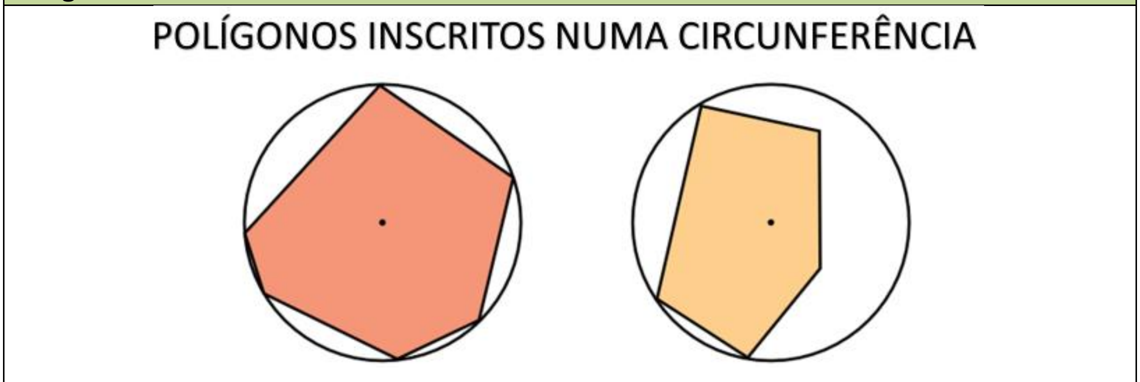

p. 99

10 Na figura está representado um polígono irregular com seis lados. Determina a amplitude do ângulo α.

Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Uma vez resolvida uma das alíneas na aula anterior, não se esperam dificuldades por parte dos alunos na resolução dos exercícios.	A professora começa por perguntar quem se voluntaria para resolver cada uma das questões. Caso nenhum aluno se voluntarie, a professora escreve a correção dos exercícios em conjunto com a turma. Após a explicitação da resposta por parte dos alunos que a resolveram no quadro, a professora pode acrescentar alguma informação que lhe pareça necessária.	Os alunos voluntariam-se para resolver os exercícios no quadro e explicam a resposta aos restantes colegas. Os alunos que não se voluntariem para escrever a sua resolução no quadro, devem estar atentos à resolução apresentada e comparar com a que realizou, a fim de esclarecer eventuais dúvidas.

MOMENTO III

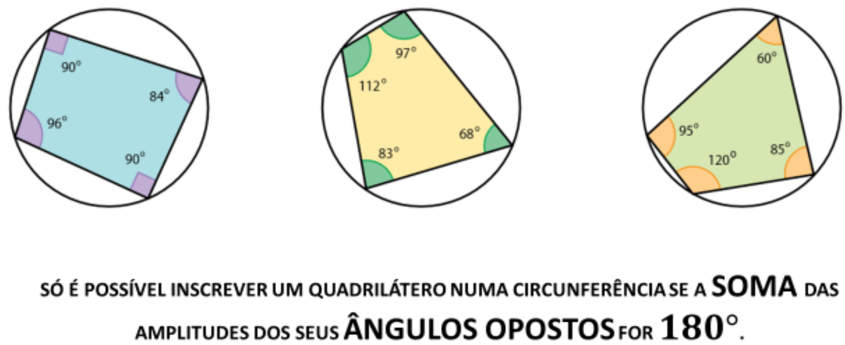
Polígonos inscritos numa circunferência



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno

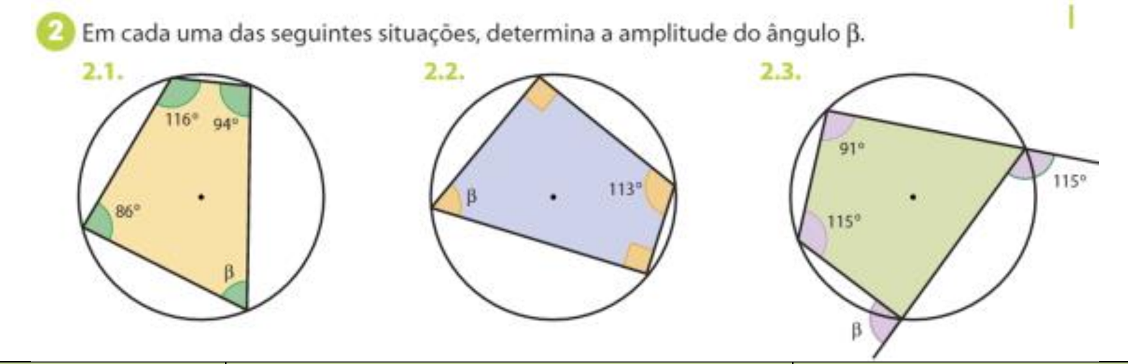
Uma vez apresentada a questão pela professora, os alunos não manifestam dificuldades na distinção de polígono inscrito e polígono não inscrito numa circunferência.	A professora começa por perguntar qual a diferença entre estes dois polígonos, para além do número de lados. Após isso, pergunta à turma qual o polígono inscrito e o que não está inscrito na circunferência. Inicialmente, é lido o enunciado das primeiras e segundas questões.	Espera-se que os alunos consigam reconhecer que enquanto o primeiro polígono tem os vértices todos sob a circunferência, o segundo tem dois dos seus vértices no interior da circunferência. Após isso, distinguem polígonos inscritos de não inscritos numa circunferência.

Quadriláteros inscritos



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Uma vez lançadas as questões pela professora, os alunos não manifestam dificuldades em responder às mesmas, chegando à conclusão de que a soma dos ângulos oposto é 180°.	A professora começa por questionar quantos lados tem cada um dos polígonos apresentados e se estão ou não inscritos nas circunferências. Após isso, pede-lhes que calculem a soma dos ângulos opostos de cada um dos quadriláteros e que verbalizem a conclusão a que chegaram. Apresenta-se, após isso, a conclusão incluída no slide e pede-se aos alunos que a transcrevam para o caderno diário.	Os alunos terão um papel ativo durante a apresentação dos slides, devendo responder às interpelações dirigidas pela professora à turma.

Exercícios de consolidação



Dificuldades	Papel professor	Papel aluno
Fazendo uso da conclusão anterior, não se espera que os alunos apresentem dificuldades na resolução das três alíneas.	Neste momento, a professora deve imprimir um ritmo bastante rápido na resolução dos exercícios, dado a dificuldade dos mesmos. Na alínea 2.3, a professora explica outro método de resolução, começando por pedir aos alunos que identifiquem o tipo de ângulo que é o β e desenvolve o raciocínio associado ao cálculo da amplitude de um ângulo ex-inscrito.	Os alunos desenvolvem trabalho autónomo (individualmente ou em díade). Os alunos voluntariam-se para escrever a resolução dos exercícios no quadro, explicitando a sua resposta a toda a turma.

MOMENTO III

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, no último momento da aula a professora entrega os *feedbacks* escritos do último exercício.

Anexo 29: Plano da aula do dia 30 de março.

<table>
<tr><th colspan="3">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola [redacted]</td><td>9.ºF</td><td>Domínio: GM9</td></tr>
<tr><td>30.mar.2017
Lições 116 e 117</td><td>Ângulos e Circunferências
Polígonos inscritos numa circunferência</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sumário</td></tr>
<tr><td colspan="3">· Polígonos inscritos numa circunferência: continuação da aula anterior.
· Resolução de exercícios de consolidação.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conteúdos matemáticos</td></tr>
<tr><td colspan="3">· Polígono regular;
· Ângulo ao centro.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="3">· Provar que os ângulos ao centro de um polígono regular são geometricamente iguais;</td></tr>
</table>

· Reconhecer que a amplitude de cada ângulo ao centro de um polígono regular é $\frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono. · Saber construir, com transferidor e compasso, um polígono regular com lados inscritos numa circunferência, sendo conhecido um dos seus vértices e o centro da circunferência.
Capacidades transversais
· Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma) · Raciocínio matemático

Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro; · Compasso e transferidor (grande dimensão).	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha; · Compasso e transferidor.

Avaliação
· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula; · A professora avaliará e dará feedback às resoluções escritas dos alunos.

Momentos da aula		duração	início
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	5 min	13h35
II	· Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular" · P. 102: 3	40 min	13h40
III	· Tarefa "Construir polígonos regulares"	40 min	14h20
IV	· **Conclusão da aula** Entrega dos *feedback*s escritos	5 min	15h

Desenvolvimento da Aula

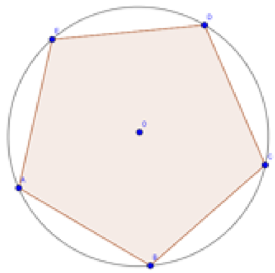
MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade).

MOMENTO II

Tarefa "Ângulos ao centro num polígono regular"

1. Observe o pentágono regular [ABCDE] inscrito na circunferência de centro O representada ao lado.



1.1. Trace os segmentos de reta [AO], [OB], [OC], [OD] e [OE]. Que relação existe entre os arcos AB, BC, CD, DE e EA?
E entre os ângulos ao centro AOB, BOC, COD, DOE e EOA? Justifique.

____
____
____

1.2. Com base na resposta à questão anterior, calcule a amplitude do ângulo ao centro COD.

2. De acordo com o cálculo que realizou na alínea anterior, preencha a tabela.

Polígono	N.º de lados	Amplitude de um ângulo ao centro
Pentágono regular		
Hexágono regular		
Heptágono regular		
Octógono regular		
n-ágono regular	n	

Enquanto distribui a tarefa pelos alunos, a professora faz uma breve referência à aula anterior, perguntando o que caracteriza um polígono regular, ao que os alunos deverão responder tanto a nível dos lados como dos ângulos internos. Caso os alunos façam referência a apenas uma das características a professora deve relembrar a outra. De seguida, pedindo aos alunos que escrevam, a professora dita a seguinte propriedade: “Todo o polígono regular pode ser inscrito numa circunferência”. Sublinhando que o método mais eficaz de construir um polígono regular é inscrevê-lo numa circunferência. Após isso, lê-se, em turma, o enunciado da tarefa, no sentido de perceber se existem dificuldades a nível da interpretação do mesmo. Neste momento, a professora deve sublinhar a importância de justificarem as respostas e esclarecer que “n-ágono regular” é um polígono regular com n lados. A professora deve pedir aos alunos que, tanto na questão 1.2 como na terceira coluna da tabela, apresentem os cálculos que efetuarem.

Os alunos iniciam então o momento de trabalho autónomo (individualmente ou em díade). O papel da professora neste momento da aula será maioritariamente motivador e de acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos.

Os alunos podem ter dificuldade em explicitar a justificação para o facto de os arcos serem geometricamente iguais (recorrendo a uma propriedade estudada há algumas aulas) e consequentemente os ângulos ao centro também. Caso a professora se aperceba dessa dificuldade pode sugerir que procurem na página 80 do manual a propriedade adequada à justificação que procuram. Se porventura os alunos manifestarem dificuldades na questão 1.2, a professora deve sublinhar que os ângulos ao centro são todos geometricamente iguais e por isso têm a mesma amplitude e de seguida perguntar ao aluno qual a amplitude do ângulo que inclui todos esses ângulos ao centro (o ângulo giro que mede $360°$) e quantos ângulos ao centro identifica (cinco). Caso os alunos não consigam fazer o preenchimento da tabela, a professora pode sugerir que comecem por preencher os espaços relativos ao pentágono com base nas respostas às alíneas anteriores e que posteriormente façam um esboço de um hexágono regular inscrito numa circunferência, nele identifiquem os ângulos ao centro e calculem a amplitude de um deles. Os alunos deverão então reconhecer que para completar a tabela poderão estabelecer o raciocínio análogo (sem a necessidade de fazerem um esboço) para os vários polígonos.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos alunos/pares para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, faça referência à mesma.

Se alguns alunos resolverem a tarefa num tempo mais curto do que o esperado, a professora sugere que resolvam o exercício 3 da página 102 do manual, no qual se espera que não hajam dificuldades na determinação do valor da amplitude de α. Caso os alunos não consigam determinar a amplitude do ângulo β por não reconhecerem que corresponde a três ângulos ao centro do heptágono inscrito, a professora pode sugerir que subdividam β em ângulos cujas amplitudes consigam calcular e que, para uma construção mais fácil e completa da resposta, podem assinalar alguns pontos na figura.

3 Na figura 1 está representado um pentágono regular inscrito numa circunferência de centro *O*. Na figura 2 está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro *P*. Determina as amplitudes dos ângulos α e β.

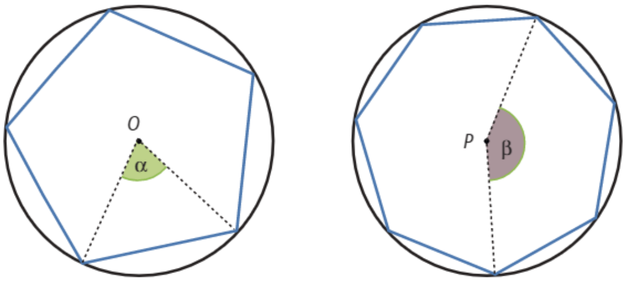


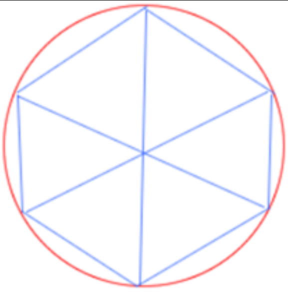
Figura 1 Figura 2

A professora inicia o momento de discussão da tarefa, projetando a figura que consta na tarefa (pentágono regular inscrito na circunferência) e começa por traçar os segmentos de reta pretendidos e posteriormente pergunta aos alunos que relação existe entre os arcos referidos e entre os ângulos ao centro (ver questão 1.1 da tarefa) e qual a justificação para se reconhecer que os arcos são geometricamente iguais e os ângulos ao centro também são geometricamente iguais. A professora deve deixar claro que se parte do facto de o polígono, por ser regular, ter os lados todos iguais para se concluir que lhes correspondem arcos e ângulos ao centro geometricamente iguais. Pede então aos alunos que escrevam a propriedade no verso da tarefa, ditando-a (“a cordas geometricamente iguais correspondem arcos e ângulos ao centro geometricamente iguais”).

Posteriormente, pergunta aos alunos qual o valor que obtiveram para a amplitude do ângulo COD e que cálculo efetuaram para o descobrir.

Procurando que os alunos cheguem à relação entre o número de lados de um polígono inscrito numa circunferência e a amplitude dos ângulos ao centro, a professora pergunta então “E se polígono tivesse 6 lados, quanto mediria cada ângulo ao centro? E tivesse 7?”. Em simultâneo projeta a tabela que consta na tarefa (ver questão 2) e preenche a mesma consoante as respostas que os alunos vão verbalizando, chegando ao preenchimento na linha do n-ágono, a professora deve referir que os alunos conseguiram chegar à generalização/fórmula que a partir de agora poderão utilizar diretamente quando necessário.

A professora pergunta aos alunos quais as conclusões que eles podem retirar da tarefa que realizaram procurando levá-los às que projetará como síntese e pede aos alunos que as transcrevam para o caderno diário. Enquanto os alunos transcrevem as conclusões da primeira tarefa, a professora distribui pela turma o enunciado da segunda.



ÂNGULOS AO CENTRO DE UM **POLÍGONO REGULAR**
INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA SÃO
GEOMETRICAMENTE IGUAIS.

A AMPLITUDE DE CADA UM DELES É $\frac{360°}{n}$,

n O NÚMERO DE LADOS.

MOMENTO III

Tarefa “Construir polígonos regulares”

Através da tarefa anterior, foi-lhe possível concluir que os ângulos ao centro de um polígono regular inscrito numa circunferência são todos geometricamente iguais e que a **amplitude de cada um** deles é $\frac{360}{n}$, sendo **n o número de lados do polígono**.

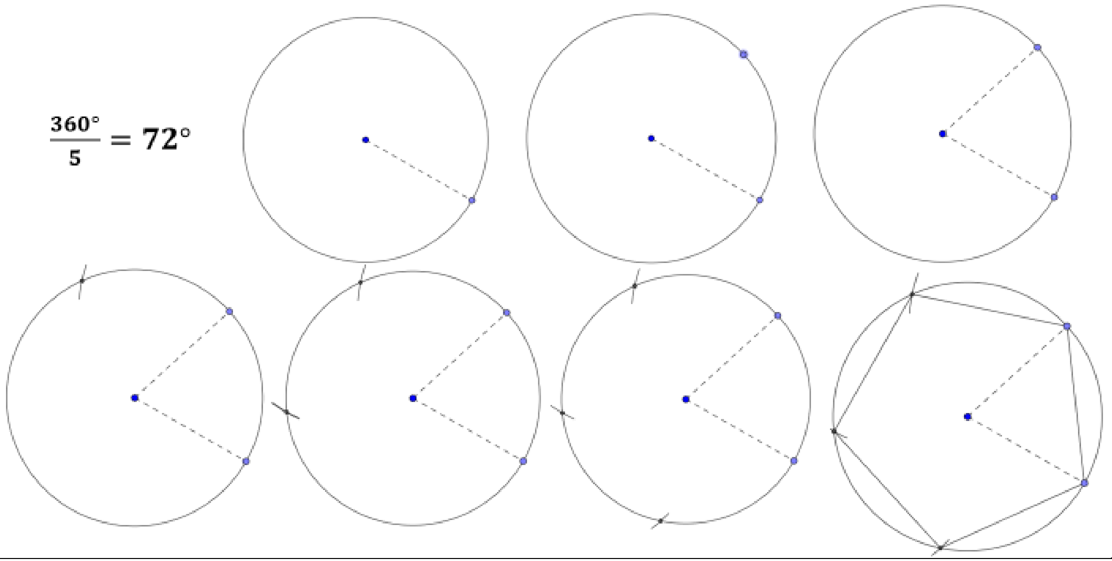
Vejamos o método seguinte para **inscrever um pentágono regular numa circunferência**.

1.º passo: Calcule a amplitude do ângulo ao centro do pentágono regular. (Apresente o cálculo que efetuar).
2.º passo: Trace uma circunferência de centro O e com um raio à sua escolha.
3.º passo: Nessa circunferência construa, com o auxílio de um transferidor, um ângulo ao centro com a amplitude que calculou no 1.º passo.
4.º passo: Coloque a ponta seca do compasso num extremo do arco que obteve e a outra ponta do compasso sobre o outro extremo do arco. Com essa abertura do compasso, divida a circunferência em cinco arcos geometricamente iguais.
5.º passo: Una os pontos resultantes da interseção da circunferência com as marcas que a dividiram de forma a obter um pentágono regular.

A professora começa por ler a introdução à tarefa que faz referência à conclusão retirada da tarefa anterior e adianta que com esta segunda tarefa se pretende construir, passo a passo, um pentágono regular numa circunferência. Não será lido o enunciado em turma pois não se esperam dificuldades a nível da interpretação, sendo assim anunciado o momento em que os alunos deverão trabalhar a pares.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através da observação e do questionamento, os erros e a dificuldades que os alunos apresentarem. A execução dos passos que requerem o uso do compasso e do transferidor podem acarretar dificuldades e/ou erros por parte dos alunos. Caso na execução dos terceiro e/ou quarto passos muitos dos alunos manifestem grandes dificuldades, a professora deverá fazer uma sugestão/observação geral para a turma utilizando o material de Geometria destinado a esse fim, interrompendo por minutos o trabalho autónomo.
Aos alunos que concluírem a tarefa num intervalo de tempo inferior ao reservado em plano de aula, a professora sugere que façam, no verso da folha da tarefa, a construção de um hexágono regular numa circunferência.

A professora anuncia aos alunos que, de seguida, será feito um levantamento dos passos que seguiram na construção de um pentágono regular inscrito numa circunferência. Os passos vão sendo projetados à medida que os alunos dizem o que se faz no passo seguinte. Caso algum aluno tenha realizado a construção do hexágono regular, a professora pede-lhe que explicite de que modo o fez, incitando-o a apresentar a sua construção no quadro para toda a turma. No caso de nenhum aluno ter realizado a construção do hexágono, a professora questiona a turma de que forma se faria a construção do mesmo e sublinha que a principal diferença reside no cálculo inicial que se faz da amplitude do ângulo ao centro.



MOMENTO IV

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, no último momento da aula a professora entrega os *feedbacks* escritos das duas últimas tarefas realizadas em sala de aula.

Anexo 30: Plano da aula do dia 3 de abril.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	03.abr.2017 Lições 118 e 119	**Ângulos e Circunferências** Ângulos numa circunferência

Sumário

- Aplicação de conhecimentos numa situação do real.

Conteúdos matemáticos

- Ângulo inscrito;
- Ângulos excêntricos (com vértice no interior ou no exterior da circunferência).

Objetivos

- Saber aplicar conhecimentos numa situação do real.

Capacidades transversais

- Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão (a pares e/ou turma)
- Raciocínio matemático

Recursos e Materiais

Do professor	Do aluno
· Manual e Caderno de Atividades; · Quadro e canetas para quadro; · Vídeo.	· Manual e Caderno de Atividades; · Lápis, caneta e borracha.

Avaliação
· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula.

Momentos da aula		duração	início
II	· Vídeo da aula de 2017.03.02 · Vídeo 1 · Vídeo 2 · Vídeo 3	15 min	11h18
III	· **Conclusão da aula** · Entrega dos *feedback*s escritos · Recolha dos *portfólios*	2 min	11h33

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade).

MOMENTO II

· Vídeo da aula de 2017.03.02
Antes de iniciar a visualização do vídeo já visto numa aula anterior, a professora pergunta aos alunos se eles se recordam do desfio que foi lançado na primeira aula desta subunidade, realçando que nessa aula em que esse vídeo tinha sido visualizado, os alunos não sabiam resolver a questão lançada visto que nem conheciam alguns dos conceitos utilizados, enquanto que agora já é suposto mobilizarem alguns conceitos e aprendizagens. O vídeo é projetado sem qualquer interrupção/explicitação por parte a professora.
Após a visualização do vídeo, a professora pergunta qual é a questão principal lançada pelo vídeo, esperando-se que os alunos saibam identificar a problemática: “na trajetória do Ronaldo, qual o local em que ele terá um melhor ângulo para fazer o remate?”. A professora introduz o próximo vídeo como um auxílio na resolução da tarefa.
· Vídeo 1
O primeiro vídeo faz apresentação de um ângulo inscrito na circunferência e posteriormente refere uma característica dos ângulos inscritos: “se o Ronaldo se deslocar ao longo desta circunferência, o ângulo não se altera”. A professora deve fazer uma interrupção no vídeo antes que seja apresentada essa característica levando os alunos a proferirem-na, perguntando o que acontece a esse ângulo caso o Ronaldo se mova ao longo da circunferência. Após obter a resposta dos alunos, a professora pede à turma que justifique essa mesma característica. Caso os alunos não consigam justificar essa característica, a professora pode optar por desenhar, sobre a projeção, um outro

ângulo inscrito no mesmo arco de circunferência, esperando-se que os alunos reconheçam a propriedade "ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência, têm a mesma amplitude" ou refiram que "ambos os ângulos inscritos desenhados têm metade da amplitude do arco compreendido entre os postes da baliza". A professora prossegue com a visualização do vídeo.
A professora pedindo aos alunos que considerem a circunferência apresentada e a trajetória do Ronaldo, leva a turma a conjeturar qual será o melhor ponto da trajetória para ele rematar. Os alunos poderão ter dificuldade em considerar um ponto da trajetória, fazendo referência a pontos do campo de futebol que não pertençam à trajetória (dentro da circunferência, por exemplo). Caso os alunos manifestem essa dificuldade a professora deve relembrar que a questão incide na trajetória do Ronaldo. Posteriormente, introduzindo o segundo vídeo, refere que será apresentada a resposta à questão.
· Vídeo 2
Este vídeo apresenta a resposta à questão, sem qualquer justificação. Assim, a professora pergunta aos alunos, por que razão, a partir de outros pontos da trajetória, a probabilidade de marcar golo é menor. Caso os alunos manifestem dificuldade na justificação, a professora pode identificar um outro ponto da trajetória e unindo-o aos postes da baliza, pergunta à turma que tipo de ângulo é considerando a sua posição relativamente à circunferência. Caso os alunos tenham dificuldade em reconhecer que é um ângulo excêntrico de vértice no exterior da circunferência, a professora pode questionar a turma, enumerando: "É um ângulo ao centro? Inscrito? Excêntrico?". Após isso, pede aos alunos que apresentem a razão pela qual a amplitude deste ângulo excêntrico é inferior à do ângulo inscrito. Espera-se que os alunos sintam dificuldade em responder a esta questão, assim, a professora, apercebendo-se dessa dificuldade, pode sugerir que se pense na fórmula para calcular a amplitude de um ângulo excêntrico de vértice no exterior da circunferência e que posteriormente se compare a mesma com a do cálculo da amplitude do ângulo inscrito. Para esta explicitação, podem identificar-se alguns pontos sobre a projeção, nomeadamente em cada um dos postes da baliza e nos vértices de cada um dos ângulos (o inscrito e o excêntrico).
Antecipando um resultado apresentado no vídeo seguinte, a professora pergunta à turma se sugere um outro ponto, fora da trajetória, a partir do qual Ronaldo teria maior probabilidade de marcar golo. Espera-se que os alunos, intuitivamente, façam referência a algum ponto dentro da circunferência. Após isso, a professora pede que justifiquem "matematicamente" o facto de, em algum desses pontos, o ângulo ser maior. Caso os alunos manifestem dificuldade em justificar esse mesmo facto, reconhecendo que é um ângulo excêntrico de vértice no interior da circunferência, a professora pode sugerir que os alunos identifiquem o tipo de ângulo de que se trata, considerando a posição que ocupa relativamente à circunferência e posteriormente que recorram novamente à fórmula para calcular a amplitude desse mesmo ângulo, comparando-a com a do cálculo da amplitude do ângulo inscrito.
· Vídeo 3

A professora refere que o vídeo que se segue apresenta as conclusões a que os alunos já chegaram anteriormente, sendo possível de as visualizar no campo de futebol.
Após a visualização do vídeo, as professoras perguntas se subsistem dúvidas relativamente a algum passo da resolução deste "desafio". A professora conclui referindo que esta é uma situação em que é possível verificar a aplicação de conhecimentos matemáticos a situações do real.

MOMENTO III

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, no último momento da aula a professora entrega os *feedbacks* escritos das duas últimas tarefas realizadas em sala de aula e recolhe os *portfólios* em falta.

Anexo 31: Plano da aula do dia 4 de abril.

Plano de Aula		
Escola [redacted]	9.ºF	Domínio: GM9
	04.abr.2017 Lição 120	**Ângulos e Circunferências**

Sumário	
· Auto e heteroavaliação. · Reflexão do trabalho realizado na subunidade "Ângulos e circunferências".	
Objetivos	
· Saber avaliar criticamente e num sentido construtivo, o trabalho individual, da turma e da professora.	
Recursos e Materiais	
Do professor	Do aluno
· Quadro e canetas para quadro;	· Lápis, caneta e borracha.
Avaliação	
· A professora, por observação, faz o registo das participações dos alunos ao longo da aula.	

Momentos da aula		**duração**	**início**
I	· **Sumário** · **Faltas/presenças**	5 min	9h
II	· Heteroavaliação · Questionário	38 min	9h05
III	· **Conclusão da aula**	2 min	9h43

Desenvolvimento da Aula

MOMENTO I

- O sumário será escrito pela professora no quadro;
- São registadas as faltas (de assiduidade e de pontualidade).

MOMENTO II

· Heteroavaliação
A professora inicia o momento de heteroavaliação referindo que é uma continuação da aula anterior, assim informa que os alunos começam por verbalizar, inidivual e sequencialmente, qual o valor (de 1 a 5) a que pensam corresponder o trabalho que realizaram ao longo do segundo período letivo. À medida que cada aluno enuncia a sua autoavaliação, a professora revela o valor que atribui, até ao momento, ao trabalho desenvolvido, sublinhando que essa informação ainda irá a conselho de turma.
· Questionário
A professora entrega o questionário aos alunos e após isso lê-se o enunciado do mesmo, momento em que a professora refere o objetivo principal do mesmo (recolher a opinião dos alunos relativamente ao funcionamento da disciplina na subunidade "Ângulos e circunferências") e dirige orientações explícitas aos alunos para a escrita da reflexão, sublinhando a importância de os alunos escreverem exemplos concretos de situações que tenham ocorrido para a fundamentação das suas respostas. Para responderem à terceira questão, os alunos deverão recorrer aos enunciados das tarefas que realizaram, caso os alunos não os tenham com eles, a professora projeta o enunciado das mesmas. A professora deve fazer a distinção entre as questões 7 e 8, esclarecendo que os alunos podem considerar que "determinado recurso é engraçado ou motivador", no entanto, percebem que "não os ajuda a aprender melhor". A professora dá início ao tempo de trabalho autónomo e nesse durante este momento deve garantir que todos os alunos estão a responder ao questionário, fundamentando as respostas.

MOMENTO III

- Quando se aproxima a hora de saída, os alunos têm tendência a dispersar, arrumar o material utilizado, havendo uma especial dificuldade em permanecerem atentos nestes últimos minutos da aula. Assim, no último momento da aula a professora, ao recolher as respostas dos alunos ao questionário, sugere que partilhem alguns aspetos que considerem importantes para se pensar em turma, incentivando os alunos a uma atitude crítica do trabalho individual, de turma e do próprio professor.